Suite IV - Die Zerrissene

Teil 6: Essays 309-317

Meinem Vater

$\mathsf{311.0}(x,y,z)$ **.**

$\mathsf{311.0}(x,\{.\}\circ f,\mathsf{stm})$ **mit** $f:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$**.**

$\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$**.** $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$**.**

paarweise disjunkt. wirkt disjunkt.

<u>RECH-Notation</u>. Fortsetzung.

$\mathcal{U}_x$**Axiom.**

$\uparrow x$**.** $\uparrow$**Axiom.**

<u>RECH-Notation</u>. Fortsetzung.

$p\ {}_{\mathtt{ni}}Ex$**.** $xE_{\mathtt{in}}p$**.** $x\ {}_{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$**.**

$\uparrow x$**.**

MSC2010: 03D20. 26A09. 06A99.

Andreas Unterreiter

19. Juni 2015

Mengenlehre: Weiteres über $\{(p,q)\}\cup x$.

Ersterstellung: 28/08/14 **Letzte Änderung: 28/08/14**

309-1. Falls $q\notin \mathsf{ran}\, x$ und falls x injektiv, so ist auch $\{(p,q)\}\cup x$ injektiv. Eine strukturelle Ähnlichkeit zu **261-4** fällt auf.

309-1(Satz)

Aus "$q\notin \mathsf{ran}\, x$" und "x injektiv" folgt "$\{(p,q)\}\cup x$ injektiv".

Beweis **309-1** `VS` gleich $(q\notin \mathsf{ran}\, x)\wedge(x \text{ injektiv})$.

`Thema1` $(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{(p,q)\}\cup x$.

`2.1:` Aus `Thema1` "$(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{(p,q)\}\cup x$"
folgt via **ElementAxiom**: $(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)$ Menge.

`2.2:` Aus `Thema1` "$(\alpha,\beta)\ldots\in\{(p,q)\}\cup x$"
folgt via **94-8**: $((\alpha,\beta)=(p,q))\vee((\alpha,\beta)\in x)$.

`2.3:` Aus `Thema1` "$\ldots(\gamma,\beta)\in\{(p,q)\}\cup x$"
folgt via **94-8**: $((\gamma,\beta)=(p,q))\vee((\gamma,\beta)\in x)$.

`3:` Aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt:
$$((\alpha,\beta)=(p,q))\wedge((\gamma,\beta)=(p,q))$$
$$\vee(((\alpha,\beta)=(p,q))\wedge((\gamma,\beta)\in x))$$
$$\vee(((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\gamma,\beta)=(p,q)))$$
$$\vee((\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in x).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $((\alpha,\beta)=(p,q))\wedge((\gamma,\beta)=(p,q))$.

`4:` Aus `3.1.Fall`
folgt: $(\alpha,\beta)=(\gamma,\beta)$.

`3:` Aus `2.1` "$(\alpha,\beta)\ldots$ Menge" und
aus `4` "$(\alpha,\beta)=(\gamma,\beta)$"
folgt via **IGP**: $\alpha=\gamma$.

...

...

<u>Beweis</u> **309-1** . . .

`Thema1` $$(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{(p,q)\}\cup x.$$

. . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`3.2.Fall` $$((\alpha,\beta)=(p,q))\wedge((\gamma,\beta)\in x).$$

`4.1:` Aus `2.1`“$(\alpha,\beta)\ldots$ Menge” und
aus `3.2.Fall`“$(\alpha,\beta)=(p,q)\ldots$”
folgt via **IGP**: $\beta=q.$

`4.2:` Aus `3.2.Fall`“$\ldots(\gamma,\beta)\in x$”
folgt via **7-5**: $\beta\in\mathsf{ran}\,x.$

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $q\in\mathsf{ran}\,x.$

`6:` Es gilt `5`“$q\in\mathsf{ran}\,x$”.
Es gilt `VS` gleich “$q\notin\mathsf{ran}\,x\ldots$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha=\gamma.$

`3.3.Fall` $$((\alpha,\beta)\in x)\wedge((\gamma,\beta)=(p,q)).$$

`4.1:` Aus `3.3.Fall`“$(\alpha,\beta)\in x\ldots$”
folgt via **7-5**: $\beta\in\mathsf{ran}\,x.$

`4.2:` Aus `2.1`“$\ldots(\gamma,\beta)$ Menge” und
aus `3.3.Fall`“$\ldots(\gamma,\beta)=(p,q)$”
folgt via **IGP**: $\beta=q.$

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $q\in\mathsf{ran}\,x.$

`6:` Es gilt `5`“$q\in\mathsf{ran}\,x$”.
Es gilt `VS` gleich “$q\notin\mathsf{ran}\,x\ldots$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\alpha=\gamma.$

. . .

. . .

Beweis **309-1** ...

`Thema1` $(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{(p,q)\}\cup x.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.4.Fall` $(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in x.$

Aus `VS` gleich "... x injektiv" und
aus `3.4.Fall` "$(\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in x$"
folgt via **8-1(Def)**: $\alpha=\gamma.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\alpha=\gamma.$

Ergo `Thema1`: $\forall\alpha,\beta,\gamma:((\alpha,\beta),(\gamma,\beta)\in\{(p,q)\}\cup x)\Rightarrow(\alpha=\gamma).$

Konsequenz via **8-1(Def)**: $\{(p,q)\}\cup x$ injektiv.

□

309-2. Aussage **261-3** kann verbessert werden.

309-2(Satz)

a) *Aus "q Menge" folgt "*$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x)=\{p\}\cup\mathsf{dom}\,x$*".*

b) *Aus "p Menge" folgt "*$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}\cup x)=\{q\}\cup\mathsf{ran}\,x$*".*

Beweis **309-2** `a)` `VS` gleich q Menge.

`1:` Es gilt: $(p \text{ Menge})\vee(p \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Menge.

Aus `1.1.Fall` "p Menge" und
aus `VS` gleich "q Menge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x)=\{p\}\cup\mathsf{dom}\,x$.

`1.2.Fall` p Unmenge.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "p Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{p\}=0$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "p Unmenge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x)=\mathsf{dom}\,x$.

`3:` $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x)\overset{2.2}{=}\mathsf{dom}\,x\overset{\mathbf{2-17}}{=}0\cup\mathsf{dom}\,x\overset{2.1}{=}\{p\}\cup\mathsf{dom}\,x$.

`4:` Aus 3
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x)=\{p\}\cup\mathsf{dom}\,x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\}\cup x)=\{p\}\cup\mathsf{dom}\,x$.

Beweis **309-2** `b) VS` gleich p Menge.

`1:` Es gilt: $(q \text{ Menge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` q Menge.

Aus `VS` gleich "p Menge" und
aus `1.1.Fall` "q Menge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x$.

`1.2.Fall` q Unmenge.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "q Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{q\} = 0$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall` "q Unmenge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \mathsf{ran}\,x$.

`3:` $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) \stackrel{2.2}{=} \mathsf{ran}\,x \stackrel{\mathbf{2-17}}{=} 0 \cup \mathsf{ran}\,x \stackrel{2.1}{=} \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup x) = \{q\} \cup \mathsf{ran}\,x$.

□

309-3. Aussage **261-4** kann ergänzt werden.

<u>**309-3(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $f : D \to B$.

$\rightarrow\!)$ $p \notin D$.

$\rightarrow\!)$ q *Menge.*

Dann folgt "$\{(p,q)\} \cup f : \{p\} \cup D \to \{q\} \cup B$".

<u>Beweis **309-3**</u>

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

2.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$p \notin D$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
folgt: $p \notin \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus $\rightarrow\!)$ "q Menge"
folgt via **309-2**: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup f) = \{p\} \cup \mathsf{dom}\, f$.

2.3: Via **261-3** gilt: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup f) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, f$.

3.1: Aus 1 "f Funktion…" und
aus 2.1 "$p \notin \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **261-4**: $\{(p,q)\} \cup f$ Funktion.

3.2: Aus 2.2 und
aus 1 "$\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup f) = \{p\} \cup D$.

3.3: Aus 1 "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **158-4**: $\{q\} \cup \mathsf{ran}\, f \subseteq \{q\} \cup B$.

4: Aus 2.3 "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup f) \subseteq \{q\} \cup \mathsf{ran}\, f$" und
aus 3.3 "$\{q\} \cup \mathsf{ran}\, f \subseteq \{q\} \cup B$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup f) \subseteq \{q\} \cup B$.

5: Aus 3.1 "$\{(p,q)\} \cup f$ Funktion",
aus 3.2 "$\mathsf{dom}\,(\{(p,q)\} \cup f) = \{p\} \cup D$" und
aus 4 "$\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup f) \subseteq \{q\} \cup B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\{(p,q)\} \cup f : \{p\} \cup D \to \{q\} \cup B$.

$\square$

309-4. Die Injektivitäts-Aussage von **309-1** und die Funktions-Aussage von **309-3** kombinieren in wohlgefälliger Weise.

309-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

$\rightarrow$) f *injektiv.*

$\rightarrow$) $p \notin D$.

$\rightarrow$) $q \notin B$.

$\rightarrow$) q *Menge.*

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f : \{p\} \cup D \to \{q\} \cup B$.

b) $\{(p,q)\} \cup f$ *injektiv.*

Beweis **309-4**

1.a): Aus $\rightarrow$)"$f : D \to B$",
aus $\rightarrow$)"$p \notin D$" und
aus $\rightarrow$)"q Menge"
folgt via **309-3**: $\{(p,q)\} \cup f : \{p\} \cup D \to \{q\} \cup B$.

1.1: Aus $\rightarrow$)"$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

2: Aus 1.1"$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus $\rightarrow$)"$q \notin B$"
folgt via **0-4**: $q \notin \mathsf{ran}\, f$.

3.b): Aus 2"$q \notin \mathsf{ran}\, f$" und
aus $\rightarrow$)"f injektiv"
folgt via **309-1**: $\{(p,q)\} \cup f$ injektiv.

$\square$

309-5. Mit ein wenig zusätzlichem Beweisaufwand ist aus **309-4** eine Bijektions-Version deduzierbar. Im Vergleich zu **309-4** fällt die Voraussetzung "p Menge" auf.

309-5(Satz) *Es gelte:*

→) $f : D \to B$ *bijektiv.*

→) $p \notin D$.

→) $q \notin B$.

→) p, q *Menge.*

Dann folgt:

a) $\{(p,q)\} \cup f : \{p\} \cup D \to \{q\} \cup B$ *bijektiv.*

b) $f \subseteq \{(p,q)\} \cup f$.

c) $f \neq \{(p,q)\} \cup f$.

Beweis **309-5**

1: Aus →) "$f : D \to B$ bijektiv"
folgt via **22-1(Def)**: $(f : D \to B) \wedge (f \text{ injektiv}) \wedge (\mathsf{ran}\, f = B)$.

2.1: Aus 1"$f : D \to B \ldots$",
aus 1"$\ldots f$ injektiv$\ldots$",
aus →) "$p \notin D$",
aus →) "$q \notin B$" und
aus →) "$\ldots q$ Menge"
folgt via **309-4**:
$$(\{(p,q)\} \cup f : \{p\} \cup D \to \{q\} \cup B) \wedge (\{(p,q)\} \cup f \text{ injektiv}).$$

2.2: Aus →) "p, q Menge"
folgt via **261-3**: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup f) = \{q\} \cup \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2.2 und
aus 1"$\ldots \mathsf{ran}\, f = B$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\} \cup f) = \{q\} \cup B$.

...

Beweis **309-5** . . .

`4.a):` Aus `2.2`“ $(\{(p,q)\}\cup f:\{p\}\cup D\to\{q\}\cup B)\wedge(\{(p,q)\}\cup f$ injektiv) ” und
aus `3`“ $\mathsf{ran}\,(\{(p,q)\}\cup f)=\{q\}\cup B$ ”
folgt via **22-1(Def)**: $\{(p,q)\}\cup f:\{p\}\cup D\to\{q\}\cup B$ bijektiv.

`4.b):` Via **2-7** gilt: $f\subseteq\{(p,q)\}\cup f$.

`4.1:` Es gilt: $(f=\{(p,q)\}\cup f)\vee(f\neq\{(p,q)\}\cup f)$.

`wfFallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $f=\{(p,q)\}\cup f$.

`5:` Aus `4.1.1.Fall`“ $f=\{(p,q)\}\cup f$”
folgt via **2-10**: $\{(p,q)\}\subseteq f$.

`6:` Aus →) “ p,q Menge ”
folgt via **259-36**: $(p,q)\in\{(p,q)\}$.

`7:` Aus `6`“ $(p,q)\in\{(p,q)\}$ ” und
aus `5`“ $\{(p,q)\}\subseteq f$ ”
folgt via **0-4**: $(p,q)\in f$.

`8:` Aus `7`“ $(p,q)\in f$ ”
folgt via **7-5**: $p\in\mathsf{dom}\,f$.

`9:` Aus `1`“ $f:D\to B\ldots$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,f=D$.

`10:` Aus `8` und
aus `9`
folgt: $p\in D$.

`11:` Es gilt `10`“ $p\in D$ ” .
Es gilt →) “ $p\notin D$ ” .
Ex falso quodlibet folgt: $f\neq\{(p,q)\}\cup f$.

`Ende wfFallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “ $f\neq\{(p,q)\}\cup f$ ”

`5.c):` Aus `A1`
folgt: $f\neq\{(p,q)\}\cup f$.

□

Mengenlehre: M_Infimum/M_Supremum.
M_Minimum/M_Maximum.
M reflexiv in z.

Ersterstellung: 29/08/14 **Letzte Änderung: 01/09/14**

310-1. Nacharbeiten hilft. Beispiel **36-8** liefert auch den Nachweis, dass es nichtleere Mengen x mit unteren/oberen M_Schranken p/q gibt, für die *nicht* p_M_q gilt. Selbst für M_Infimum/M_Supremum ändert sich nichts.

310-1.Bemerkung

- Die Aussage
  “ $((0 \neq x)$
  $\wedge(u$ untere M_Schranke von $x) \wedge (o$ obere M_Schranke von $x))$
  $\Rightarrow (u\_M\_o)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.
- Die Aussage
  “ $((0 \neq x)$
  $\wedge(inf$ ist M_Infimum von $x) \wedge (sup$ ist M_Supremum von $x))$
  $\Rightarrow (inf\_M\_sup)$”
  ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

310-2. Zur Belegung von **310-1** liegt das von **36-8** vertraute Beispiel vor.

310-2.BEISPIEL

Es gelte:

$\rightarrow$) u, o, p Menge.

$\rightarrow$) $u \neq o \neq p \neq u$.

$\rightarrow$) $M = \{(u, u), (u, p), (p, o), (o, o)\}$.

$\rightarrow$) $x = \{p\}$.

Dann folgt:

`a)` $0 \neq x$.

`b)` u untere M_Schranke von x

`c)` u ist M_Infimum von x.

`d)` o obere M_Schranke von x.

`e)` o ist M_Supremum von x.

`f)` $\neg(u\_M\_o)$.

Ad `e)`: Es gilt nicht $(u, o) \in M$.

310-3. Nacharbeiten hilft auch zu klären, was M_Infima von 0 und M_Maxima von $\mathsf{dom}\, M$ miteinander zu tun haben.

310-3(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) *p ist M_Infimum von 0.*

ii) *p ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.*

Beweis **310-3** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ VS gleich p ist M_Infimum von 0.

1: Aus VS gleich "p ist M_Infimum von 0"
folgt via **36-3**: $p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1"$p \in (\mathsf{dom}\, M) \cap (\mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **2-2**: $(p \in \mathsf{dom}\, M) \wedge (p \in \mathsf{ran}\, M)$.

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\alpha \in \mathsf{dom}\, M$.

4: Aus Thema3.1"$\alpha \in \mathsf{dom}\, M$"
folgt via **35-7**: α untere M_Schranke von 0.

5: Aus VS gleich "p ist M_Infimum von 0" und
aus 4"α untere M_Schranke von 0"
folgt via **36-1(Def)**: α_M_p.

Ergo Thema3.1: A1 | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha$_$M$_$p)$"

3.2: Aus 2"$\ldots p \in \mathsf{ran}\, M$" und
aus A1 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, M) \Rightarrow (\alpha$_$M$_$p)$"
folgt via **35-1(Def)**: p obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$.

4: Aus 3.2"p obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M$" und
aus 2"$p \in \mathsf{dom}\, M \ldots$"
folgt via **38-1(Def)**: p ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

<u>Beweis **310-3**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich p ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$.

1: Aus `VS` gleich "p ist M_Maximum von $\mathsf{dom}\, M$"
folgt via **38-1(Def)**: $(p$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, M)$.

2: Aus 1"$(p$ obere M_Schranke von $\mathsf{dom}\, M) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, M)$"
folgt via **36-11**: p ist M_Infimum von 0.

□

310-4. Auch der “Zwillingssatz” von **310-3** erscheint dank Nacharbeiten.

310-4(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) p *ist* M*-Supremum von* 0.

ii) p *ist* M*-Minimum von* $\mathsf{ran}\,M$.

Beweis **310-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich p ist M-Supremum von 0.

1: Aus VS gleich “p ist M-Supremum von 0”
folgt via **36-4**: $p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$.

2: Aus 1“$p \in (\mathsf{dom}\,M) \cap (\mathsf{ran}\,M)$”
folgt via **2-2**: $(p \in \mathsf{dom}\,M) \wedge (p \in \mathsf{ran}\,M)$.

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,M$.

4: Aus Thema3.1“$\alpha \in \mathsf{ran}\,M$”
folgt via **35-7**: α obere M-Schranke von 0.

5: Aus VS gleich “p ist M-Supremum von 0” und
aus 4“α obere M-Schranke von 0”
folgt via **36-1(Def)**: p_M_α.

Ergo Thema3.1: A1 | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,M) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$”

3.2: Aus 2“$p \in \mathsf{dom}\,M \ldots$” und
aus A1 gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,M) \Rightarrow (p\_M\_\alpha)$”
folgt via **35-1(Def)**: p untere M-Schranke von $\mathsf{ran}\,M$.

4: Aus 3.2“p untere M-Schranke von $\mathsf{ran}\,M$” und
aus 2“$\ldots p \in \mathsf{ran}\,M$”
folgt via **38-1(Def)**: p ist M-Minimum von $\mathsf{ran}\,M$.

<u>Beweis **310-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich p ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$.

1: Aus VS gleich "p ist M_Minimum von $\mathsf{ran}\, M$"
folgt via **38-1(Def)**: $(p$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M) \wedge (p \in \mathsf{ran}\, M)$.

2: Aus 1"$(p$ untere M_Schranke von $\mathsf{ran}\, M) \wedge (p \in \mathsf{ran}\, M)$"
folgt via **36-11**: p ist M_Supremum von 0.

□

310-5. Schlecht formulierte Sätze erschweren ihr Auffinden. Nun sollen **36-3,4** nachträglich korrigiert werden.

310-5(Satz)

a) *Aus "inf ist M_Infimum von x" und "$p \in x$" folgt "inf_M_p".*

b) *Aus "sup ist M_Supremum von x" und "$p \in x$" folgt "p_M_sup".*

Beweis **310-5** a) VS gleich $(inf$ ist M_Infimum von $x) \wedge (p \in x)$.

1: Aus VS gleich "inf ist M_Infimum von $x \ldots$"
folgt via **36-3**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (inf\_M\_\alpha)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots p \in x$" und
aus 1 "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (inf\_M\_\alpha)$"
folgt: inf_M_p.

b) VS gleich $(sup$ ist M_Supremum von $x) \wedge (p \in x)$.

1: Aus VS gleich "sup ist M_Supremum von $x \ldots$"
folgt via **36-3**: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_sup)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots p \in x$" und
aus 1 "$\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha\_M\_sup)$"
folgt: p_M_sup.

$\square$

310-6. Auch die Allquantor-Aussagen von **30-19** lesen sich nicht besonders gut. Höchste Zeit, eine lesbarere Form nachzureichen.

310-6(Satz)

a) *Aus* "M *reflexiv in* z" *und* "$p \in z$" *und* "$p = q$" *folgt* "p_M_q" *und* "q_M_p" *und* "q_M_q".

b) *Aus* "M *reflexiv in* z" *und* "$p \in z$" *und* "$\neg(p\_M\_q)$" *folgt* "$p \neq q$".

c) *Aus* "M *reflexiv in* z" *und* "$p \in z$" *und* "$\neg(q\_M\_p)$" *folgt* "$p \neq q$".

Beweis **310-6** a) VS gleich $(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (p = q)$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in $z \ldots$"
folgt via **30-19**:
$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta)).$$

2: Aus VS gleich "$\ldots (p \in z) \wedge (p = q)$" und
aus 1 "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\alpha = \beta)) \Rightarrow ((\alpha\_M\_\beta) \wedge (\beta\_M\_\alpha) \wedge (\beta\_M\_\beta))$"
folgt: $(p\_M\_q) \wedge (q\_M\_p) \wedge (q\_M\_q)$.

b) VS gleich $(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (\neg(p\_M\_q))$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in $z \ldots$"
folgt via **30-19**: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots (p \in z) \wedge (\neg(p\_M\_q))$" und
aus 1 "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$"
folgt: $p \neq q$.

c) VS gleich $(M \text{ reflexiv in } z) \wedge (p \in z) \wedge (\neg(q\_M\_p))$.

1: Aus VS gleich "M reflexiv in $z \ldots$"
folgt via **30-19**: $\forall \alpha, \beta : ((\beta \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots (p \in z) \wedge (\neg(q\_M\_p))$" und
aus 1 "$\forall \alpha, \beta : ((\beta \in z) \wedge (\neg(\alpha\_M\_\beta))) \Rightarrow (\alpha \neq \beta)$"
folgt: $q \neq p$.

3: Aus 2
folgt: $p \neq q$.

$\square$

Mengenlehre: $\mathsf{311.0}(x, y, z)$.
$\mathsf{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$.

Ersterstellung: 02/09/14 **Letzte Änderung: 02/09/14**

311-1. Der Nachweis, dass jede unendliche *Menge* eine “ unendlich-abzählbare” - dieser Begriffe wird später definiert - Teilmenge umfasst, wird von langer Hand vorbereitet.

311-1(Definition)

$$\mathsf{311.0}(x, y, z)$$

$$= \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$$

$$= \{\omega : (\exists \Omega, \Phi, \Psi : (\Omega \in x) \wedge ((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (((\Omega, \Phi), \Psi) \in z) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

311-2. In rudimentärer Weise werden einige Eigenschaften von $\mathtt{311.0}(x,y,z)$ bewiesen.

311-2(Satz)

a) *Aus* “$(p,q) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$” *folgt* “$p \in x$” *und* “$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p,\Omega) \in y) \wedge (((p,\Omega),q) \in z)$”.

b) *Aus* “$p \in x$” *und* “$(p,r) \in y$” *und* “$((p,r),q) \in z$” *folgt* “$(p,q) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$”.

c) $\mathtt{311.0}(x,y,z)$ *Relation.*

d) *Aus* “$p \in \mathsf{dom}\, \mathtt{311.0}(x,y,z)$” *folgt* “$p \in x$” *und* “$p \in \mathsf{dom}\, y$” *und* “$p \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{dom}\, z)$”.

e) $\mathsf{dom}\, \mathtt{311.0}(x,y,z) \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, y$.

f) *Aus* “$\mathsf{dom}\, z = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$” *folgt* “$\mathsf{dom}\, \mathtt{311.0}(x,y,z) = x \cap \mathsf{dom}\, y$”.

g) $\mathsf{ran}\, \mathtt{311.0}(x,y,z) \subseteq \mathsf{ran}\, z$.

$$\mathtt{311.0}(x,y,z) = \{(\lambda,\mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda,\Omega) \in y) \wedge (((\lambda,\Omega),\mu) \in z))\}$$

311-1(Def)

<u>Beweis **311-2**</u> `a)` `VS` gleich $(p,q) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$"
folgt via **311-1(Def)**:
$\exists \Phi, \Omega, \Psi : (\Phi \in x) \wedge ((\Phi, \Omega) \in y) \wedge (((\Phi, \Omega), \Psi) \in z) \wedge ((p,q) = (\Phi, \Psi))$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots (\Phi, \Omega) \in y \ldots$"
folgt via **9-15**: Ω Menge.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots (p,q) = (\Phi, \Psi)$" und
aus `1.1`"(p,q) Menge"
folgt via **IGP**: $(p = \Phi) \wedge (q = \Psi)$.

`3.1:` Aus `2.2`"$p = \Phi \ldots$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi \in x \ldots$"
folgt: $\boxed{p \in x}$

`3.2:` Aus `2.2`"$p = \Phi \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \Omega) = (\Phi, \Omega)$.

`4.1:` Aus `3.2` und
aus `1.2`"$\ldots (\Phi, \Omega) \in y \ldots$"
folgt: $(p, \Omega) \in y$.

`4.2:` Aus `3.2`"$(p, \Omega) = (\Phi, \Omega)$" und
aus `2.2`"$\ldots q = \Psi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p, \Omega), q) = ((\Phi, \Omega), \Psi)$.

`5:` Aus `4.2` und
aus `1.2`$\ldots ((\Phi, \Omega), \Psi) \in z \ldots$
folgt: $((p, \Omega), q) \in z$.

`6:` Aus `1.2`"$\exists \ldots \Omega \ldots$",
aus `2.1`,
aus `4.1` und
aus `5.1`
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p, \Omega) \in y) \wedge (((p, \Omega), q) \in z)}$

Beweis **311-2** `b)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge ((p, r) \in y) \wedge (((p, r), q) \in z)$.

`1.1:` Aus →) “$p \in x \ldots$” folgt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Aus →) “$\ldots (p, r) \in y \ldots$” folgt: $\exists \Phi : \Phi = r$.

`1.3:` Aus →) “$\ldots ((p, r), q) \in z$” folgt: $\exists \Psi : \Psi = q$.

`1.4:` Aus `VS` gleich “$p \in x \ldots$”
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.5:` Aus `VS` gleich “$\ldots ((p, r), q) \in z$”
folgt via **9-15**: q Menge.

`2.1:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega = p$” und
aus `VS` gleich “$p \in x \ldots$”
folgt: $\Omega \in x$.

`2.2:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega = p$” und
aus `1.4`
folgt: Ω Menge.

`2.3:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega = p$” und
aus `1.2`“$\ldots \Phi = r$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi) = (p, r)$.

`2.4:` Aus `1.1`“$\ldots \Omega = p$” und
aus `1.3`“$\ldots \Psi = q$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, q)$.

`2.5:` Aus `1.3`“$\ldots \Psi = q$” und
aus `1.5`
folgt: Ψ Menge.

`3.1:` Aus `2.3` und
aus `VS` gleich “$\ldots (p, r) \in y \ldots$”
folgt: $(\Omega, \Phi) \in y$.

`3.2:` Aus `2.3`“$(\Omega, \Phi) = (p, r)$” und
aus `1.3`“$\ldots \Psi = q$”
folgt via **PaarAxiom I**: $((\Omega, \Phi), \Psi) = ((p, r), q)$.

`3.3:` Aus `2.2`“Ω Menge” und
aus `2.5`“Ψ Menge”
folgt via **PaarAxiom I**: (Ω, Ψ) Menge.

…

<u>Beweis</u> **311-2** `b)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge ((p,r) \in y) \wedge (((p,r),q) \in z)$.

...

`4:` Aus `3.2` und
aus `VS` gleich "$\ldots ((p,r),q) \in z$"
folgt: $((\Omega, \Phi), \Psi) \in z$.

`5:` Aus `1.1` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `1.2` "$\exists \Phi \ldots$",
aus `1.3` "$\exists \Psi \ldots$",
aus `2.1` "$\Omega \in x$",
aus `3.1` "$(\Omega, \Phi) \in y$",
aus `4` "$((\Omega, \Phi), \Psi) \in z$",
aus "$(\Omega, \Psi) = (\Omega, \Psi)$" und
aus `3.3` "(Ω, Ψ) Menge"
folgt via **311-1(Def)**: $(\Omega, \Psi) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$.

`6:` Aus `2.4` und
aus `5`
folgt: $(p,q) \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$.

`c)`

| `Thema1` | $\alpha \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$. |

Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathtt{311.0}(x,y,z)$"
folgt via **311-1(Def)**: $\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathtt{311.0}(x,y,z)) \Rightarrow (\exists \Omega, \Phi : \alpha = (\Omega, \Phi))$.

Konsequenz via **10-3**: $\mathtt{311.0}(x,y,z)$ Relation.

<u>Beweis **311-2**</u> `d)` `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, 311.0(x, y, z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, 311.0(x, y, z)$ "
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in 311.0(x, y, z)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots (p, \Omega) \in 311.0(x, y, z)$ "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{p \in x}$

`2.2:` Aus `1`"$\ldots (p, \Omega) \in 311.0(x, y, z)$ "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Phi : ((p, \Phi) \in y) \wedge (((p, \Phi), \Omega) \in z)$.

`3.1:` Aus `2.2`"$\ldots (p, \Phi) \in y \ldots$"
folgt via **7-5**: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\, y}$

`3.2:` Aus `2.2`"$\ldots ((p, \Phi), \Omega) \in z$"
folgt via **7-5**: $(p, \Phi) \in \mathsf{dom}\, z$.

`4:` Aus `3.2`"$(p, \Phi) \in \mathsf{dom}\, z$"
folgt via **7-5**: $\boxed{p \in \mathsf{dom}\, (\mathsf{dom}\, z)}$

`e)`

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{dom}\, 311.0(x, y, z)$.
`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathsf{dom}\, 311.0(x, y, z)$ " folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, y)$.
`3:` Aus `2`"$(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, y)$" folgt via **2-2**: $\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, y$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{dom}\, 311.0(x, y, z)) \Rightarrow (\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{dom}\, 311.0(x, y, z) \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, y$.

Beweis **311-2** `f)` `VS` gleich $\mathsf{dom}\, z = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`1.1`: Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\, 311.0(x,y,z) \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, y$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, y$.

`2`: Aus `Thema1.2`“$\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, y$”
folgt via **2-2**: $(\alpha \in x) \wedge (\alpha \in \mathsf{dom}\, y)$.

`3`: Aus `2`“$\ldots \alpha \in \mathsf{dom}\, y$”
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\alpha, \Omega) \in y$.

`4`: Aus `3`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in y$”
folgt via **ElementAxiom**: (α, Ω) Menge.

`5`: Aus `4`“(α, Ω) Menge”
folgt via **298-2**: $(\alpha, \Omega) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`6`: Aus `5` und
aus `VS`
folgt: $(\alpha, \Omega) \in \mathsf{dom}\, z$.

`7`: Aus `6`“$(\alpha, \Omega) \in \mathsf{dom}\, z$”
folgt via **7-7**: $\exists \Phi : ((\alpha, \Omega), \Phi) \in z$.

`8`: Aus `2`“$\alpha \in x \ldots$”,
aus `3`“$\ldots (\alpha, \Omega) \in y$” und
aus `7`“$\ldots ((\alpha, \Omega), \Phi) \in z$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$(\alpha, \Phi) \in 311.0(x,y,z)$.

`9`: Aus `8`“$(\alpha, \Phi) \in 311.0(x,y,z)$”
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{dom}\, 311.0(x,y,z)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\, y) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, 311.0(x,y,z))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$x \cap \mathsf{dom}\, y \subseteq 311.0(x,y,z)$”

`2`: Aus `1.1`“$\mathsf{dom}\, 311.0(x,y,z) \subseteq x \cap \mathsf{dom}\, y$” und
aus `A1` gleich “$x \cap \mathsf{dom}\, y \subseteq \mathsf{dom}\, 311.0(x,y,z)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom}\, 311.0(x,y,z) = x \cap \mathsf{dom}\, y$.

Beweis **311-2** g)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\, 311.0(x, y, z)\,.$

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\, 311.0(x, y, z)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in 311.0(x, y, z)\,.$

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \alpha) \in 311.0(x, y, z)$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\exists \Phi : ((\Omega, \Phi), \alpha) \in z.$

4: Aus 3 "$\ldots ((\Omega, \Phi), \alpha) \in z$"
folgt via **7-5**: $\alpha \in \mathsf{ran}\, z.$

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\, 311.0(x, y, z)) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\, z).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\, 311.0(x, y, z) \subseteq \mathsf{ran}\, z.$

$\square$

311-3. Das geordnete Paar $(p, x(p))$ ist genau dann eine Menge, wenn $p \in \mathsf{dom}\, x$. Falls f eine Funktion und $(p, f(p))$ eine Menge ist folgt ausserdem $(p, f(p)) \in f$.

311-3(Satz)

`a)` *"$(p, x(p))$ Menge" genau dann, wenn "$p \in \mathsf{dom}\, x$".*

`b)` *Aus "f Funktion" und "$(p, f(p))$ Menge" folgt "$(p, f(p)) \in f$".*

Beweis **311-3** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(p, x(p))$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$(p, x(p))$ Menge"
folgt via **9-15**: $x(p)$ Menge.

`2:` Aus `1` "$x(p)$ Menge"
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $p \in \mathsf{dom}\, x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-5**: $x(p)$ Menge.

`2:` Aus `1.1` "p Menge" und
aus `1.2` "$x(p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, x(p))$ Menge.

`b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p, f(p)) \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots (p, f(p))$ Menge"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus `1` "$p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

□

311-4. Wird von y mehr Struktur gefordert - hier: y soll eine Funktion sein - so gewinnt die Diskussion von **311-2**`ab)` etwas an Fahrt.

311-4(Satz)

`a)` *Aus "f Funktion" und "$(p,q)\in 311.0(x,f,z)$"*
folgt "$p\in x$" und "$p\in\mathsf{dom}\,f$" und "$((p,f(p)),q)\in z$".

`b)` *Aus "f Funktion" und "$p\in x$" und "$((p,f(p)),q)\in z$"*
folgt "$(p,q)\in 311.0(x,f,z)$".

$311.0(x,y,z) = \{(\lambda,\mu) : (\lambda\in x)\wedge(\exists\Omega : ((\lambda,\Omega)\in y)\wedge(((\lambda,\Omega),\mu)\in z))\}$
311-1(Def)

Beweis **311-4** `a)` `VS` gleich $(f\text{ Funktion})\wedge((p,q)\in 311.0(x,f,z))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots(p,q)\in 311.0(x,f,z)$"
folgt via **311-2**: $\boxed{p\in x}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots(p,q)\in 311.0(x,f,z)$"
folgt via **311-2**: $\exists\Omega : ((p,\Omega)\in f)\wedge(((p,\Omega),q)\in z)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\ldots(p,\Omega)\in f\ldots$"
folgt via **7-5**: $\boxed{p\in\mathsf{dom}\,f}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1.2`"$\ldots(p,\Omega)\in f\ldots$"
folgt via **18-20**: $\Omega=f(p)$.

`3:` Aus `2.2`"$\Omega=f(p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p,\Omega)=(p,f(p))$.

`4:` Aus `3`"$(p,\Omega)=(p,f(p))$"
folgt via **PaarAxiom I**: $((p,\Omega),q)=((p,f(p)),q)$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2`"$\ldots((p,\Omega),q)\in z$"
folgt: $\boxed{((p,f(p)),q)\in z}$

<u>Beweis **311-4**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in x) \wedge (((p, f(p)), q) \in z)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((p, f(p)), q) \in z$"
folgt via **9-15**: $(p, f(p))$ Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und
aus `1` "$(p, f(p))$ Menge"
folgt via **311-3**: $(p, f(p)) \in f$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x \ldots$",
aus `2` "$(p, f(p)) \in f$" und
aus `VS` gleich "$((p, f(p)), q) \in z$"
folgt via **311-2**: $(p, q) \in \texttt{311.0}(x, f, z)$.

□

311-5. Ein wenig verändert sich in **311-2**, wenn z eine Funktion ist.

311-5(Satz)

a) *Aus "f Funktion" und "$(p,q) \in \mathsf{311.0}(x,y,f)$" folgt "$p \in x$" und "$\exists \Omega : (\Omega$ Menge$) \wedge ((p,\Omega) \in y) \wedge (q = f(p,\Omega))$".*

b) *Aus "f Funktion" und "$p \in x$" und "$(p,r) \in y \cap \mathsf{dom}\, f$" folgt "$(p, f(p,r)) \in \mathsf{311.0}(x,y,f)$".*

$\mathsf{311.0}(x,y,z) = \{(\lambda,\mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda,\Omega) \in y) \wedge (((\lambda,\Omega),\mu) \in z))\}$ **311-1(Def)**

Beweis **311-5** a) VS gleich $(f$ Funktion$) \wedge ((p,q) \in \mathsf{311.0}(x,y,f))$.

1.1: Aus VS gleich "$\ldots (p,q) \in \mathsf{311.0}(x,y,f)$"
folgt via **311-2**: $\boxed{p \in x}$

1.2: Aus VS gleich "$\ldots (p,q) \in \mathsf{311.0}(x,y,f)$"
folgt via **311-2**: $\exists \Omega : (\Omega$ Menge$) \wedge ((p,\Omega) \in y) \wedge (((p,\Omega),q) \in f)$.

2: Aus VS gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus 1.2 "$\ldots ((p,\Omega),q) \in f$"
folgt via **18-20**: $q = f(p,\Omega)$.

3: Aus 1.2 "$\exists \Omega : (\Omega$ Menge$) \wedge ((p,\Omega) \in y) \ldots$" und
aus 2
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p,\Omega) \in y) \wedge (q = f(p,\Omega))}$

b) VS gleich $(f$ Funktion$) \wedge (p \in x) \wedge ((p,r) \in y \cap \mathsf{dom}\, f)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots (p,r) \in y \cap \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **2-2**: $((p,r) \in y) \wedge ((p,r) \in \mathsf{dom}\, f)$.

2: Aus VS gleich "f Funktion$\ldots$" und
aus 1 "$\ldots (p,r) \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $((p,r), f(p,r)) \in f$.

3: Aus VS gleich "$\ldots p \in x \ldots$",
aus 1 "$(p,r) \in y \ldots$" und
aus 2 "$((p,r), f(p,r)) \in f$"
folgt via **311-2**: $(p, f(p,r)) \in \mathsf{311.0}(x,y,f)$.

□

311-6. Der vielleicht interessanteste Spezialfall von **311-2** liegt vor, wenn y, z Funktionen sind.

311-6(Satz)

a) *Aus* "f, g *Funktion*" *und* "$(p, q) \in \mathtt{311.0}(x, f, g)$" *folgt* "$p \in x$" *und* "$p \in \mathsf{dom}\, f$" *und* "$(p, f(p)) \in \mathsf{dom}\, g$" *und* "$q = g(p, f(p))$".

b) *Aus* "f, g *Funktion*" *und* "$p \in x$" *und* "$(p, f(p)) \in \mathsf{dom}\, g$" *folgt* "$(p, g(p, f(p))) \in \mathtt{311.0}(x, f, g)$".

c) *Aus* "f, g *Funktion*" *folgt* "$\mathtt{311.0}(x, f, g)$ *Funktion*".

d) *Aus* "f, g *Funktion*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\, \mathtt{311.0}(x, f, g)$" *folgt* "$\mathtt{311.0}(x, f, g)\,(p) = g(p, f(p))$".

e) *Aus* "f, g *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\, g = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" *folgt* "$\mathtt{311.0}(x, f, g) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, g$".

f) *Aus* "f, g *Funktion*" *und* "$p \in x \cap \mathsf{dom}\, f$" *und* "$\mathsf{dom}\, g = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" *folgt* "$\mathtt{311.0}(x, f, g)\,(p) = g(p, f(p))$".

$$\mathtt{311.0}(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$$

311-1(Def)

<u>Beweis **311-6**</u> `a)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge ((p, q) \in \mathtt{311.0}(x, f, g))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…" und aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in \mathtt{311.0}(x, f, g)$"
folgt via **311-4**: $\boxed{(p \in x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…" und aus `VS` gleich "$\ldots (p, q) \in \mathtt{311.0}(x, f, g)$"
folgt via **311-4**: $((p, f(p)), q) \in g$.

`2.1:` Aus `1.2`"$((p, f(p)), q) \in g$"
folgt via **7-5**: $\boxed{(p, f(p)) \in \mathsf{dom}\, g}$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion…" und aus `1.2`"$((p, f(p)), q) \in g$"
folgt via **18-20**: $\boxed{q = g(p, f(p))}$

`b)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (p \in x) \wedge ((p, f(p)) \in \mathsf{dom}\, g)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots g$ Funktion…" und aus `VS` gleich "$\ldots (p, f(p)) \in \mathsf{dom}\, g$"
folgt via **18-22**: $((p, f(p)), g(p, f(p))) \in g$.

`2:` Aus `VS` gleich "$f \ldots$ Funktion…", aus `VS` gleich "$\ldots p \in x \ldots$" und aus `1`"$((p, f(p)), g(p, f(p))) \in g$"
folgt via **311-4**: $(p, g(p, f(p))) \in \mathtt{311.0}(x, f, g)$.

<u>Beweis **311-6**</u> `c)` `VS` gleich f, g Funktion.

`1.1:` Via **311-2** gilt: $\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Relation.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…" und
aus `Thema1.2`"$(\alpha, \beta) \in \ldots \mathsf{311.0}(x, f, g)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\beta = g(\alpha, f(\alpha))$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…" und
aus `Thema1.2`"$\ldots (\alpha, \gamma) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\gamma = g(\alpha, f(\alpha))$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta = \gamma$.

Ergo `Thema1.2`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Relation" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : ((\alpha, \beta), (\alpha, \gamma) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Funktion.

`d)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, \mathsf{311.}(x, f, g))$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, \mathsf{311.0}(x, f, g)$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (p, \Omega) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Funktion.

`2.1:` Aus `1.2`"$\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Funktion" und
aus `1.1`"$\ldots (p, \Omega) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)$"
folgt via **18-20**: $\Omega = \mathsf{311.0}(x, f, g)(p)$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…" und
aus `1.1`"$\ldots (p, \Omega) \in \mathsf{311.0}(x, f, g)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\Omega = g(p, f(p))$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\mathsf{311.0}(x, f, g)(p) = g(p, f(p))$.

<u>Beweis **311-6**</u> `e)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, g = \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, g = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **311-2**: $\mathsf{dom}\, \mathsf{311.0}(x, f, g) = x \cap \mathsf{dom}\, f$.

`1.3:` Via **311-2** gilt: $\mathsf{ran}\, \mathsf{311.0}(x, f, g) \subseteq \mathsf{ran}\, g$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{311.0}(x, f, g)$ Funktion",
aus `1.2`"$\mathsf{dom}\, \mathsf{311.0}(x, f, g) = x \cap \mathsf{dom}\, f$" und
aus `1.3`"$\mathsf{ran}\, \mathsf{311.0}(x, f, g) \subseteq \mathsf{ran}\, g$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{311.0}(x, f, g) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{dom}\, g$.

`f)` `VS` gleich $(f, g \text{ Funktion}) \wedge (p \in x \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\mathsf{dom}\, g = \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, g = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **311-2**: $\mathsf{dom}\, \mathsf{311.0}(x, f, g) = x \cap \mathsf{dom}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in x \cap \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `1`
folgt: $p \in \mathsf{dom}\, \mathsf{311.0}(x, f, g)$.

`3:` Aus `VS` gleich "f, g Funktion…" und
aus `2`"$p \in \mathsf{dom}\, \mathsf{311.0}(x, f, g)$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{311.0}(x, f, g)(p) = g(p, f(p))$.

□

311-7. Die Vorbereitungen zielen auf $\texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$ ab. Später wird auf Funktionen y spezialisiert.

311-7(Satz)

a) *Aus* "$(p, q) \in \texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$"
folgt "$p \in x$" *und* $\exists \Omega : (\Omega$ *Menge*$) \wedge ((p, \Omega) \in y) \wedge (q = p \setminus \Omega)$".

b) *Aus* "$p \in x$" *und* "$(p, r) \in y$" *folgt* "$(p, p \setminus r) \in \texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$".

c) $\mathsf{dom}\, \texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\, y$.

$\texttt{311.0}(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$
311-1(Def)

Beweis **311-7**

ALG-Notation.

---

a) VS gleich $(p, q) \in \texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$.

1.1: Aus VS gleich "$(p, q) \in \texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$"

folgt via **311-2**: $\boxed{p \in x}$

1.2: Aus VS gleich "$(p, q) \in \texttt{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$"
folgt via **311-2**: $\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p, \Omega) \in y) \wedge (((p, \Omega), q) \in \mathsf{stm})$.

2: Aus 1.2"$\ldots ((p, \Omega), q) \in \mathsf{stm}$"
folgt via **298-9**: $q = p \setminus \Omega$.

3: Aus 1.2"$\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p, \Omega) \in y) \ldots$" und
aus 2

folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \text{ Menge}) \wedge ((p, \Omega) \in y) \wedge (q = p \setminus \Omega)}$

<u>Beweis **311-7**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in x) \wedge ((p, r) \in y)$.

1: Aus `VS` gleich "$\ldots (p, r) \in y$"
folgt via **ElementAxiom**: (p, r) Menge.

2: Aus 1"(p, r) Menge"
folgt via **298-2**: $(p, r) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

3: Aus 2 und
aus **298-10**"$\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" folgt: $(p, r) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$.

4: Aus `VS` gleich "$\ldots (p, r) \in y$" und
aus 3"$(p, r) \in \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$"
folgt via **2-2**: $(p, r) \in y \cap \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$.

5: Aus **298-10**"stm Funktion",
aus `VS` gleich "$p \in x \ldots$" und
aus 4"$(p, r) \in y \cap \mathsf{dom}\,\mathsf{stm}$"
folgt via **311-5**: $(p, \mathsf{stm}(p, r)) \in 311.0(x, y, \mathsf{stm})$.

6: Aus 1"(p, r) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: p, r Menge.

7: Aus 6"p, r Menge"
folgt via **298-11**: $p\_\mathsf{stm}\_r = p \setminus r$.

8: Aus "$p\_\mathsf{stm}\_r = \mathsf{stm}(p, r)$" und
aus 7
folgt: $\mathsf{stm}(p, r) = p \setminus r$.

9: Aus 8"$\mathsf{stm}(p, r) = p \setminus r$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \mathsf{stm}(p, r)) = (p, p \setminus r)$.

10: Aus 9 und
aus 5
folgt: $(p, p \setminus r) \in 311.0(x, y, \mathsf{stm})$.

`c)`
Aus **298-10**"$\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **311-2**: $\mathsf{dom}\, 311.0(x, y, \mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\, y$.

$\square$

311-8. Falls f eine Funktion ist, so nimmt **311-6** für $\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ klar erscheinende Form an.

311-8(Satz)

a) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$(p, q) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ ”
folgt “$p \in x \cap \mathsf{dom}\, f$” *und* “$q = p \setminus f(p)$”.

b) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$p \in x \cap \mathsf{dom}\, f$”
folgt “$(p, p \setminus f(p)) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ ”.

c) *Aus* “f *Funktion*” *folgt* “$\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ *Funktion*”.

d) *Aus* “f *Funktion*” *und* “$p \in x \cap \mathsf{dom}\, f$”
folgt “$\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})(p) = p \setminus f(p)$”.

e) *Aus* “f *Funktion*” *folgt* “$\mathsf{dom}\,\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\, f$”
und “$\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathcal{U}$”.

$\mathsf{311.0}(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$
311-1(Def)

Beweis **311-8** a) VS gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge ((p, q) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}))$.

1: Aus VS gleich “$\ldots (p, q) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ ”
folgt via **311-7**: $(p \in x) \wedge (\exists \Omega : ((p, \Omega) \in f) \wedge (q = p \setminus \Omega))$.

2.1: Aus 1“$\ldots (p, \Omega) \in f \ldots$”
folgt via **7-5**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus VS gleich “f Funktion…” und
aus 1“$\ldots (p, \Omega) \in f \ldots$”
folgt via **18-20**: $\Omega = f(p)$.

3.1: Aus 1“$p \in x \ldots$” und
aus 2.1“$p \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **2-2**: $\boxed{p \in x \cap \mathsf{dom}\, f}$

3.2: Aus 1“$\ldots q = p \setminus \Omega$” und
aus 2.2
folgt: $\boxed{q = p \setminus f(p)}$

<u>Beweis **311-8**</u> `b)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in x \cap \mathsf{dom}\, f)$.

`1:` Aus `VS` gleich " $\ldots p \in x \cap \mathsf{dom}\, f$ "
folgt via **2-2**: $(p \in x) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`2:` Aus `VS` gleich " f Funktion… " und
aus `1` " $\ldots p \in \mathsf{dom}\, f$ "
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`3:` Aus `1` " $p \in x \ldots$ " und
aus `2` " $(p, f(p)) \in f$ "
folgt via **311-7**: $(p, p \setminus f(p)) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$.

`c)` `VS` gleich f Funktion.
Aus `VS` gleich " f Funktion " und
aus **298-10** " stm Funktion"
folgt via **311-6**: $\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ Funktion.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in x \cap \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich " f Funktion… "
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ Funktion.

`1.2:` Aus `VS` gleich " $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in x \cap \mathsf{dom}\, f)$ "
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(p, p \setminus f(p)) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$.

`2:` Aus `1.1` " $\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ Funktion " und
aus `1.2` " $(p, p \setminus f(p)) \in \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ "
folgt via **18-20**: $p \setminus f(p) = \mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})\,(p)$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm})\,(p) = p \setminus f(p)$.

<u>Beweis **311-8**</u> `e)` `VS` gleich f Funktion.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion",
aus **298-10**"stm Funktion" und
aus **298-10**"$\mathsf{dom}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$"
folgt via **311-6**: $\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\,\mathsf{stm}$.

`2.1:` Aus `1`"$\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\,\mathsf{stm}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{\mathsf{dom}\,\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\, f}$

`2.2:` Aus `1` und
aus **298-10**"$\mathsf{ran}\,\mathsf{stm} = \mathcal{U}$"
folgt: $\boxed{\mathsf{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathcal{U}}$

$\square$

311-9. Falls $x \subseteq \mathcal{P}(v)$ und falls f eine Funktion ist, so kann $\mathsf{ran}\,311.0(x, f, \mathsf{stm})$ genauer gefasst werden.

311-9(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!\!)$ $x \subseteq \mathcal{P}(v)$.

$\rightarrow\!\!)$ f *Funktion.*

Dann folgt:

a) $\mathsf{ran}\,311.0(x, f, \mathsf{stm}) \subseteq \mathcal{P}(v)$.

b) $311.0(x, f, \mathsf{stm}) : x \cap \mathsf{dom}\,f \to \mathcal{P}(v)$.

$311.0(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$ **311-1(Def)**

Beweis **311-9** a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,311.0(x, f, \mathsf{stm})$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathsf{ran}\,311.0(x, f, \mathsf{stm})$"
folgt via **7-7**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,311.0(x, f, \mathsf{stm}))$
$\wedge((\Omega, \alpha) \in 311.0(x, f, \mathsf{stm}))$.

3: Aus $\rightarrow\!\!)$ "f Funktion"
folgt via **311-8**: $\mathsf{dom}\,311.0(x, f, \mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\,f$.

4: Aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,311.0(x, f, \mathsf{stm}) \ldots$" und
aus 3
folgt: $\Omega \in x \cap \mathsf{dom}\,f$.

5: Aus 4 "$\Omega \in x \cap \mathsf{dom}\,f$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in x$.

6: Aus 5 "$\Omega \in x$" und
aus $\rightarrow\!\!)$ "$x \subseteq \mathcal{P}(v)$"
folgt via **0-4**: $\Omega \in \mathcal{P}(v)$.

...

...

<u>Beweis</u> **311-9** `a)` . . .

`Thema1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$.

. . .

`7:` Aus →) “ f Funktion ” und
aus `4` “ $\Omega \in x \cap \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt via **311-8**: $\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})\,(\Omega) = \Omega \setminus f(\Omega)$.

`8:` Aus `6` “ $\Omega \in \mathcal{P}(v)$ ”
folgt via **5-36**: $\Omega \setminus f(\Omega) \in \mathcal{P}(v)$.

`9:` Aus `7` und
aus `8`
folgt: $\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})\,(\Omega) \in \mathcal{P}(v)$.

`10:` Aus →) “ f Funktion ”
folgt via **311-8**: $\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ Funktion.

`11:` Aus `10` “ $\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ Funktion ” und
aus `2` “ $\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})$ ”
folgt via **18-20**: $\alpha = \mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})\,(\Omega)$.

`12:` Aus `11` und
aus `9`
folgt: $\alpha \in \mathcal{P}(v)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm})\,) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(v))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathsf{ran}\,\mathtt{311.0}(x, f, \mathsf{stm}) \subseteq \mathcal{P}(v)$.

Beweis **311-9** `b)`

`1.1:` Aus →) " f Funktion "
folgt via **311-8**: $\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm})$ Funktion.

`1.2:` Aus →) " f Funktion "
folgt via **311-8**: $\mathsf{dom}\,\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\, f$.

`1.3:` Aus →) " $x \subseteq \mathcal{P}(v)$ " und
aus →) " f Funktion "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{ran}\,\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm}) \subseteq \mathcal{P}(v)$.

`2:` Aus `1.1` " $\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm})$ Funktion " ,
aus `1.2` " $\mathsf{dom}\,\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm}) = x \cap \mathsf{dom}\, f$ " und
aus `1.3` " $\mathsf{ran}\,\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm}) \subseteq \mathcal{P}(v)$ "
folgt via **21-1(Def)**: $\mathtt{311.0}(x,f,\mathsf{stm}) : x \cap \mathsf{dom}\, f \to \mathcal{P}(v)$.

□

311-10. Aus $\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}$ folgt $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$. Im Speziellen gilt $\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

311-10(Satz)

a) *Aus* "$\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}$" *folgt* "$\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$".

b) $\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

c) *Aus* "f *Funktion*" *folgt* "$\{.\} \circ f$ *Funktion*".

Beweis **311-10** a) VS gleich $\mathsf{dom}\, x = \mathcal{U}$.

1: Via **14-6** gilt: $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = y^{-1}[\mathsf{dom}\, x]$.

2: Aus 1 und aus VS folgt: $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = y^{-1}[\mathcal{U}]$.

3: Via **11-17** gilt: $y^{-1}[\mathcal{U}] = \mathsf{dom}\, y$.

4: Aus 2 und aus 3 folgt: $\mathsf{dom}\,(x \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

b)
Aus **27-14**"$\mathsf{dom}\,\{.\} = \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ y) = \mathsf{dom}\, y$.

c) VS gleich f Funktion.
Aus **27-14**"$\{.\}$ Funktion" und
aus 1"f Funktion"
folgt via **18-46**: $\{.\} \circ f$ Funktion.

□

311-11. Eine spezielle Situation von **311-9** liegt vor, wenn an Stelle von f eine Funktion $\{.\}\circ f$ betrachtet wird, wobei f die an eine universelle Auswahlfunktion erinnernde Eigenschaft $f:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$ hat.

311-11(Satz) *Es gelte:*

→) $f:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$.

→) $x\subseteq\mathcal{P}(v)$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{311.0}(x,\{.\}\circ f,\mathsf{stm}) : x\setminus\{0\}\to\mathcal{P}(v)$.

b) $\forall\alpha : (0\neq\alpha\in x)\Rightarrow(\mathsf{311.0}(x,\{.\}\circ f,\mathsf{stm})(\alpha)=\alpha\setminus\{f(\alpha)\}$.

$\mathsf{311.0}(x,y,z) = \{(\lambda,\mu) : (\lambda\in x)\wedge(\exists\Omega : ((\lambda,\Omega)\in y)\wedge(((\lambda,\Omega),\mu)\in z))\}$ **311-1(Def)**

Beweis **311-11**

1: Aus →)"$f:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

2: Aus 1"f Funktion"
folgt via **311-10**: $\{.\}\circ f$ Funktion.

3: Aus →)"$x\subseteq\mathcal{P}(v)$" und
aus 2"$\{.\}\circ f$ Funktion"
folgt via **311-9**: $\mathsf{311.0}(x,\{.\}\circ f,\mathsf{stm}) : x\cap\mathsf{dom}(\{.\}\circ f)\to\mathcal{P}(v)$.

4: Via **311-10** gilt: $\mathsf{dom}(\{.\}\circ f)=\mathsf{dom}\,f$.

5: Aus 4
folgt: $x\cap\mathsf{dom}(\{.\}\circ f)=x\cap\mathsf{dom}\,f$.

6: Aus →)"$f:\mathcal{U}\setminus\{0\}\to\mathcal{U}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\,f=\mathcal{U}\setminus\{0\}$.

7: $x\cap\mathsf{dom}(\{.\}\circ f)\stackrel{5}{=}x\cap\mathsf{dom}\,f\stackrel{6}{=}x\cap(\mathcal{U}\setminus\{0\})\stackrel{\mathbf{296-11}}{=}(x\cap\mathcal{U})\setminus\{0\}$
$\stackrel{\mathbf{2-17}}{=}x\setminus\{0\}$.

8.a): Aus 3 und
aus 7"$x\cap\mathsf{dom}(\{.\}\circ f)=\ldots=x\setminus\{0\}$"
folgt: $\mathsf{311.0}(x,\{.\}\circ f,\mathsf{stm}) : x\setminus\{0\}\to\mathcal{P}(v)$.

...

<u>Beweis **311-11**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema8.1}}$ $0 \neq \alpha \in x.$

9: Aus Thema8.1“$0 \neq \alpha \in x$”
folgt via **5-15**: $\alpha \in x \setminus \{0\}.$

10: Aus 7“$x \cap \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f) = \ldots = x \setminus \{0\}$” und
aus 9“$\alpha \in x \setminus \{0\}$”
folgt: $\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f).$

11: Aus 2“$\{.\} \circ f$ Funktion” und
aus 10“$\alpha \in x \cap \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f)$”
folgt via **311-8**:
$$\mathsf{311.0}(x, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus ((\{.\} \circ f)(\alpha)).$$

12: Aus **27-14**“$\{.\}$ Funktion” und
aus 1“f Funktion”
folgt via **18-46**: $(\{.\} \circ f)(\alpha) = \{.\}(f(\alpha)).$

13: Aus 11 und
aus 12
folgt: $\mathsf{311.0}(x, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus (\{.\}(f(\alpha))).$

14: Aus Thema8.1“$\ldots \alpha \in x$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

15: Aus 14“α Menge”
folgt via **0-22**: $\alpha \in \mathcal{U}.$

16: Aus Thema8.1“$0 \neq \alpha \ldots$” und
aus 15“$\alpha \in \mathcal{U}$”
folgt via **5-15**: $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}.$

17: Aus 16 und
aus 6
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\, f.$

18: Aus 17“$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **17-5**: $f(\alpha)$ Menge.

...

...

Beweis **311-11** . . .

$\boxed{\texttt{Thema8.1}}$ $0 \neq \alpha \in x.$

. . .

19: Aus 18 "$f(\alpha)$ Menge"
folgt via **27-14**: $\{.\}(f(\alpha)) = \{f(\alpha)\}.$

20: Aus 19 und
aus 13
folgt: $\mathsf{311.0}(x, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus \{f(\alpha)\}.$

Ergo `Thema8.1`:

Ab)	"$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \in x) \Rightarrow (\mathsf{311.0}(x, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus \{f(\alpha)\})$"

□

Mengenlehre: $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$ und $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.
Die Frage, ob jede Unmenge eine unendliche TeilMenge hat, bleibt bis auf Weiteres unbeantwortet.
$\bigcup(x \setminus \{0\}) = \bigcup x$.
Ist x eine unendliche Menge, so gibt es Funktionen Ω, Ψ mit $\Omega(\alpha) \in \alpha$ für alle nichtleeren TeilKlassen α von x und $\Omega(0) = x$ und
$\Omega(1+n) = \Omega(n) \setminus \{\Psi(\Omega(n))\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ersterstellung: 05/09/14 **Letzte Änderung: 14/09/14**

312-1. Die unendlichen Teilmengen von x werden in $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$ zusammengefasst. $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$ ist die Klasse *aller* unendlichen Mengen.

312-1(Definition)

1) $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) = \mathtt{312.0}(x) = \{\omega : (\omega \subseteq x) \wedge (\omega \text{ unendlich})\}$.

2) $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}} = \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(\mathcal{U})$.

312-2. $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$ genau dann, wenn p eine unendliche Teilmenge von x ist. $p \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$ genau dann, wenn p eine unendliche Menge ist. Ist p unendlich, so gilt $p \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$. Das triviale Ergebnis $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$ wird nachgereicht. Als Neuerung in der Notation werden "Widerspruchsbeweise" nicht mehr mit einem "Ex falso quodlibet " Abschluss zu einem formal korrekten Ende gebracht.

312-2(Satz)

a) *"$p \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$" genau dann, wenn "$p$ Menge" und "$p \subseteq x$" und "p unendlich".*

b) *"$p \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$" genau dann, wenn "$p$ Menge" und "p unendlich".*

c) *Aus "p unendlich" folgt "$p \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" und "$p \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}$".*

d) *Aus "$p \subseteq x$" und "$p \notin \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" folgt "$p$ unendlich".*

e) $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

f) *Aus "$x \subseteq y$" folgt "$\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(y)$".*

g) $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$.

h) *Aus "p endlich" folgt "$p \notin \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$" und "$p \notin \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}$".*

i) *"$x \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$" genau dann, wenn "$x$ unendlich" und "x Menge".*

<u>Beweis **312-2**</u> `a)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"

folgt via **312-1(Def)**: $\boxed{(p \subseteq x) \wedge (p \text{ unendlich})}$

`a)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq x) \wedge (p \text{ unendlich})$.
Aus `VS` gleich "$\ldots (p \subseteq x) \wedge (p \text{ unendlich})$" und
aus `VS` gleich "p Menge…"
folgt via **312-1(Def)**: $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}$" und
aus **312-1(Def)** "$\mathcal{P}_{\text{unendl}} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$"
folgt: $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$.

`2:` Aus `1` "$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ unendlich})$.

`b)` $\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(p \text{ Menge}) \wedge (p \text{ unendlich})$.

`1:` Via **0-18** gilt: $p \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `VS` gleich "p Menge…",
aus `1` "$p \subseteq \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p$ unendlich"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$.

`3:` Aus 2 und
aus **312-1(Def)** "$\mathcal{P}_{\text{unendl}} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$"
folgt: $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}$.

Beweis **312-2** `c)` `VS` gleich p unendlich.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathcal{P}_{\text{endl}}) \vee (p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$p \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **28-7**: p endlich.

`3:` Aus `VS` gleich "p unendlich"
folgt via **29-1(Def)**: $\neg(p \text{ endlich})$.

`Ende wfFallunterscheidung`

`A1` | "$p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}$"

`2.1:` Aus `A1`
folgt: $\boxed{p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}}$

`2.2:` Via **32-7** gilt: $\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3:` Aus `2.1` "$p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und
aus `2.2` "$\mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{endl}}$"
folgt via **0-4**: $\boxed{p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)}$

`d)` `VS` gleich $(p \subseteq x) \wedge (p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`1:` Via **32-4** gilt: $(p \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Leftrightarrow ((p \subseteq x) \wedge (p \text{ endlich}))$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Leftrightarrow ((\neg(p \subseteq x)) \vee (\neg(p \text{ endlich})))$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$" und
aus `2`
folgt: $(\neg(p \subseteq x)) \vee (\neg(p \text{ endlich}))$.

`4:` Aus `VS` gleich "$p \subseteq x \ldots$" und
aus `3`
folgt: $\neg(p \text{ endlich})$.

`5:` Aus `4`
folgt via **29-1(Def)**: p unendlich.

<u>Beweis</u> **312-2** `e)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.
`2.1:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" folgt via **ElementAxiom**:	α Menge.
`2.2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" folgt via **32-4**:	$\alpha \subseteq x$.
`3:` Aus `2.2`"$\alpha \subseteq x$" und aus `2.1`"α Menge" folgt via **0-26**:	$\alpha \in \mathcal{P}(x)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`f) VS` gleich $x \subseteq y$.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.
`2:` Aus `Thema1`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$" folgt via des bereits bewiesenen `a)`:	$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ unendlich})$.
`3:` Aus `2`"$\ldots \alpha \subseteq x \ldots$" und aus `VS` gleich "$x \subseteq y$" folgt via **0-6**:	$\alpha \subseteq y$.
`4:` Aus `2`"α Menge…", aus `3`"$\alpha \subseteq y$" und aus `2`"$\ldots \alpha$ unendlich" folgt via des bereits bewiesenen `a)`:	$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(y)$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(y)$.

<u>Beweis **312-2** `g)`</u>

`1:` Via **0-18** gilt: $x \subseteq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$x \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$.

`3:` Aus `2` und
aus **312-1(Def)**"$\mathcal{P}_{\text{unendl}} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U})$"
folgt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}$.

`h)` `VS` gleich p endlich.

`1:` Es gilt: $(p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}) \vee (p \notin \mathcal{P}_{\text{unendl}})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: p unendlich.

`3.1:` Aus `2`"p unendlich"
folgt via **29-1(Def)**: $\neg(p$ endlich$)$.

`3.2:` Nach `VS` gilt: p endlich.

`Ende wfFallunterscheidung`

`A1` | "$p \notin \mathcal{P}_{\text{unendl}}$"

`2:` Aus `A1`

folgt: $\boxed{p \notin \mathcal{P}_{\text{unendl}}}$

`3:` Via des bereits bewiesenen `g)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}$.

`4:` Aus `2`"$p \notin \mathcal{P}_{\text{unendl}}$" und
aus `3`"$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}$"

folgt via **0-4**: $\boxed{p \notin \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)}$

<u>Beweis **312-2**</u> `i)` $\boxed{\boxed{\Rightarrow}}$ `VS` gleich $x \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"

folgt via **ElementAxiom**: $\boxed{x \text{ Menge}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{x \text{ unendlich}}$

$\boxed{\boxed{\Leftarrow}}$ `VS` gleich $(x \text{ unendlich}) \wedge (x \text{ Menge})$.

`1:` Via **0-6** gilt: $x \subseteq x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x$ Menge",
aus `1` "$x \subseteq x$" und
aus `VS` gleich "x unendlich…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

□

312-3. Es gilt $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

312-3(Satz)

a) $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

b) $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

c) $\mathcal{P}_{\text{unendl}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

d) *Aus "x Menge" folgt "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$ Menge".*

Beweis **312-3** a)

`Thema1.1` $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

2: Aus Thema1.1 "$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"
folgt via **312-2**: $(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ unendlich})$.

3.1: Aus 2 "$(\alpha \text{ Menge}) \wedge (\alpha \subseteq x) \ldots$"
folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(x)$.

3.2: Aus 2 "$\ldots \alpha$ unendlich"
folgt via **312-2**: $\alpha \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

4: Aus 3.1 "$\alpha \in \mathcal{P}(x)$" und
aus 3.2 "$\alpha \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **5-3**: $\alpha \in \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

Ergo Thema1.1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"

...

Beweis **312-3** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$”
folgt via **5-3**: $(\alpha \in \mathcal{P}(x)) \wedge (\alpha \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x))$.

`3:` Aus `2`“$\alpha \in \mathcal{P}(x) \ldots$”
folgt via **0-26**: $(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha$ Menge$)$.

`4:` Aus `3`“$\alpha \subseteq x \ldots$” und
aus `2`“$\ldots \alpha \notin \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$”
folgt via **312-2**: α unendlich.

`5:` Aus `3`“$(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha$ Menge$)$” und
aus `4`“α unendlich”
folgt via **312-2**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | “$\mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$”

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$” und
aus `A2` gleich “$\mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`1.2:` Via **5-5** gilt: $\mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

<u>Beweis **312-3**</u> `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U}) = \mathcal{P}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$.

`2:` $\mathcal{P}_{\text{unendl}} \stackrel{\textbf{312-1(Def)}}{=} \mathcal{P}_{\text{unendl}}(\mathcal{U}) \stackrel{1}{=} \mathcal{P}(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U}) \stackrel{\textbf{0-28}}{=} \mathcal{U} \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}(\mathcal{U})$
$\stackrel{\textbf{32-7}}{=} \mathcal{U} \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`d)` `VS` gleich x Menge.

`1:` Aus `VS` gleich “x Menge”
folgt via **PotenzMengenAxiom**: $\mathcal{P}(x)$ Menge.

`2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`3:` Aus `2`“$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$” und
aus `1`“$\mathcal{P}(x)$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$ Menge.

□

312-4. Ist jede TeilMenge von x endlich so gilt äquivalenter Weise $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) = 0$.

312-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *sind äquivalent:*

`i)` $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) = 0$.

`ii)` $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`iii)` $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`iv)` $\forall \alpha : ((\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha\ \textit{Menge})) \Rightarrow (\alpha\ \textit{endlich})$.

Beweis **312-4** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) = 0$.

`1:` Via **312-3** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) = \mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $\mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) = 0$.

`3:` Aus `2` "$\mathcal{P}(x) \setminus \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) = 0$"
folgt via **5-6**: $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

`1:` Via **312-2** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$" und
aus `1` "$\mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_{\mathrm{endl}}(x)$.

...

Beweis **312-4** . . .

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ VS gleich $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

Thema1 $(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.

2: Aus Thema1 “$(\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})$” folgt via **0-26**: $\alpha \in \mathcal{P}(x)$.

3: Aus 2 und aus VS folgt: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

4: Aus 3 “$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$” folgt via **32-4**: α endlich.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : ((\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})) \Rightarrow (\alpha \text{ endlich})$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ VS gleich $\forall \alpha : ((\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})) \Rightarrow (\alpha \text{ endlich})$.

1: Es gilt: $(0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \vee (\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0)$.

wfFallunterscheidung

1.1.Fall $0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

2: Aus 1.1.Fall “$0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$” folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

3: Aus 2 “$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$” folgt via **312-2**: $(\Omega \text{ Menge}) \wedge (\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega \text{ unendlich})$.

4: Aus 3 “$\ldots \Omega \subseteq x \ldots$”,
aus 3 “Ω Menge$\ldots$” und
aus VS gleich “$\forall \alpha : ((\alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})) \Rightarrow (\alpha \text{ endlich})$”
folgt: Ω endlich.

5: Aus 3 “$\ldots \Omega$ unendlich” folgt via **29-1(Def)**: $\neg(\Omega \text{ endlich})$.

Ende wfFallunterscheidung $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0$.

$\square$

312-5. Gerne wüsste ich mehr darüber, ob jede Unmenge eine unendliche Teil-Menge hat. Mit den mir gegenwärtigen Mitteln kann ich diese Frage nicht beantworten. Ich bin kein Spezialist auf dem Gebiet der Mengenlehre. So können hier nur einfache Implikationen zur Verfügung gestellt werden.

312-5(Satz)

a) *Aus "x endlich" folgt "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0$".*

b) *Aus "x Menge" und "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0$" folgt "$x$ endlich".*

c) *Aus "$0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" folgt "$x$ unendlich".*

d) *Aus "x unendlich" folgt "x Unmenge" oder "$0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$".*

Beweis **312-5** `a)` `VS` gleich x endlich.

`1:` Es gilt: $(0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \vee (\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \Omega \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" folgt via **312-2**: $(\Omega \subseteq x) \wedge (\Omega$ unendlich$)$.

`4:` Aus `VS` gleich "x endlich" folgt via **28-7**: $x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`5:` Aus `4` "$x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" und aus `3` "$\Omega \subseteq x \ldots$" folgt via **31-4**: $\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$.

`6:` Aus `5` "$\Omega \in \mathcal{P}_{\text{endl}}$" folgt via **28-7**: Ω endlich.

`7:` Aus `3` "$\ldots \Omega$ unendlich" folgt via **29-1(Def)**: $\neg(\Omega$ endlich$)$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0$.

<u>Beweis</u> **312-5** `b)` `VS` gleich $(x \text{ Menge}) \wedge (\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "x Menge..."
folgt via **0-27**: $x \in \mathcal{P}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "...$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0$"
folgt via **312-4**: $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$.

`4:` Aus `3`"$x \in \mathcal{P}_{\text{endl}}(x)$"
folgt via **32-4**: x endlich.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(x \text{ endlich}) \Rightarrow (\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (x \text{ unendlich})$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$((x \text{ Menge}) \wedge (\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) = 0)) \Rightarrow (x \text{ endlich})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(x \text{ unendlich}) \Rightarrow ((x \text{ Unmenge}) \vee (0 \neq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)))$.

□

312-6. Beim Vereinigen kann getrost auf die leere Menge verzichtet werden.

312-6(Satz)

$$\bigcup(x \setminus \{0\}) = \bigcup x.$$

Beweis **312-6**

1: Via **5-5** gilt: $x \setminus \{0\} \subseteq x.$

2: Aus 1"$x \setminus \{0\} \subseteq x$"
folgt via **1-15**: $\bigcup(x \setminus \{0\}) \subseteq \bigcup x.$

Thema3 $\alpha \in \bigcup x.$

4: Aus Thema3"$\alpha \in \bigcup x$"
folgt via **1-12**: $\exists \Omega : \alpha \in \Omega \in x.$

5: Aus 4"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \Omega.$

6: Aus 4"$\ldots \Omega \in x$" und
aus 5"$0 \neq \Omega$"
folgt via **5-15**: $\Omega \in x \setminus \{0\}.$

7: Aus 4"$\ldots \alpha \in \Omega \ldots$" und
aus 6"$\Omega \in x \setminus \{0\}$"
folgt via **1-12**: $\alpha \in \bigcup(x \setminus \{0\}).$

Ergo Thema3: $\forall \alpha : (\alpha \in \bigcup x) \Rightarrow (\alpha \in \bigcup(x \setminus \{0\})).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: A1 | "$\bigcup x \subseteq \bigcup(x \setminus \{0\})$"

4: Aus 2"$\bigcup(x \setminus \{0\}) \subseteq \bigcup x$" und
aus A1 gleich "$\bigcup x \subseteq \bigcup(x \setminus \{0\})$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\bigcup(x \setminus \{0\}) = \bigcup x.$

□

312-7(AC). Mit einem eleganten Umweg über cartesische Produkte wird in **#259** ein Resultat über die Existenz gewisser "Auswahlfunktionen" bewiesen, das ohne viel Aufhebens direkt mit Hilfe des Auswahlaxioms verfügbar ist.

312-7(AC)(Satz)

a) $\exists\Omega : (\Omega : x \setminus \{0\} \to \bigcup x) \wedge (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \in x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$,

b) $\exists\Omega : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \wedge (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$.

Beweis **312-7(AC)** a)

1: Via **20-11**:
$(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}} \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}) = x \setminus \{0\}) \wedge (\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}) = x \setminus \{0\})$.

`Thema2` $\qquad \beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}})$.

3: Aus `Thema2` "$\beta \in \mathsf{dom}\,\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}$" und
aus `1` "$\dots \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}) = x \setminus \{0\} \dots$"
folgt: $\qquad \beta \in x \setminus \{0\}$.

4.1: Aus `3` "$\beta \in x \setminus \{0\}$"
folgt via **5-15**: $\qquad 0 \neq \beta$.

4.2: Aus `3` "$\beta \in x \setminus \{0\}$"
folgt via **20-11**: $\qquad \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\beta) = \beta$.

5: Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt: $\qquad 0 \neq \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\beta)$.

Ergo `Thema2`: $\qquad$ `A1` | "$\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\beta))$"

3: Aus `1` "$\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}$ Funktion… " und
aus `A1` gleich "$\forall\beta : (\beta \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}})) \Rightarrow (0 \neq \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\beta))$"
folgt via **Auswahlaxiom**: $\qquad \exists\Omega : (\Omega : \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}) \to \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}))$
$\wedge(\forall\gamma : (\gamma \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}})) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\gamma)))$.

4: Aus `3` und
aus `1` "$\dots \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}) = x \setminus \{0\} \dots$"
folgt: $\qquad \exists\Omega : (\Omega : x \setminus \{0\} \to \bigcup \mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}))$
$\wedge(\forall\gamma : (\gamma \in x \setminus \{0\}) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\gamma)))$.

…

Beweis **312-7(AC)** ...

5: Aus 4 und
aus 1 "... $\mathsf{ran}\,\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}} = x \setminus \{0\}$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega : x \setminus \{0\} \to \bigcup(x \setminus \{0\}))$
$\wedge(\forall\gamma : (\gamma \in x \setminus \{0\}) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\gamma)))$.

6: Via **312-6** gilt: $\bigcup(x \setminus \{0\}) = \bigcup x$.

7: Aus 6 und
aus 5
folgt: $\exists\Omega : (\Omega : x \setminus \{0\} \to \bigcup x)$
$\wedge(\forall\gamma : (\gamma \in x \setminus \{0\}) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\gamma)))$.

> `Thema8` $0 \neq \alpha \in x$.
>
> 9: Aus Thema8 "$0 \neq \alpha \in x$"
> folgt via **5-15**: $\alpha \in x \setminus \{0\}$.
>
> 10.1: Aus 9 "$\alpha \in x \setminus \{0\}$" und
> aus 7 "... $\forall\gamma : (\gamma \in x \setminus \{0\}) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\gamma))$"
> folgt $\Omega(\alpha) \in \mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\alpha)$.
>
> 10.2: Aus 9 "$\alpha \in x \setminus \{0\}$"
> folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_{x\setminus\{0\}}(\alpha) = \alpha$.
>
> 11: Aus 10.1 und
> aus 10.2
> folgt: $\Omega(\alpha) \in \alpha$.

Ergo Thema8: | A2 | "$\forall\alpha : (0 \neq \alpha \in x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$" |

9: Aus 7 "$\exists\Omega : (\Omega : x \setminus \{0\} \to \bigcup x) \dots$" und
aus A2
folgt: $\exists\Omega : (\Omega : x \setminus \{0\} \to \bigcup x) \wedge (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \in x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt:
$\exists\Omega : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \bigcup\mathcal{U}) \wedge (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$.

2: Aus 1 und
aus **1-14** "$\bigcup\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $\exists\Omega : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \wedge (\forall\alpha : (0 \neq \alpha \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$.

$\square$

312-8. Nichts am Nachfolgenden erscheint überraschend. (Kürzen! Siehe **213-5**!)

312-8(Satz)

a) *"$x \cup y$ endlich" genau dann, wenn "x, y endlich".*

b) *Aus "x unendlich" und "y endlich" folgt "$x \setminus y$ unendlich".*

c) *Aus "x endlich" und "y unendlich" folgt "$x \neq y$".*

d) *Aus "p endlich" folgt "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$".*

e) $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{0\} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

f) *Aus "$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" und "$y$ endlich" folgt "$p \neq y$" und "$p \setminus y \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$".*

g) *Aus "$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" folgt "$0 \neq p$" und "$p \setminus \{q\} \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$".*

Beweis **312-8** a) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $x \cup y$ endlich.

1: Via **2-7** gilt: $x, y \subseteq x \cup y$.

2: Aus 1"$x, y \subseteq x \cup y$" und
aus VS gleich "$x \cup y$ endlich"
folgt via **213-5**: x, y endlich.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich x, y endlich.
Aus VS gleich "x, y endlich"
folgt via **213-5**: $x \cup y$ endlich.

Beweis **312-8** `b)` `VS` gleich $(x \text{ unendlich}) \wedge (y \text{ endlich})$.

`1.1:` Via **29-1(Def)** gilt: $(x \setminus y \text{ endlich}) \vee (x \setminus y \text{ unendlich})$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $x \setminus y$ endlich.

`2:` Aus `1.1.1.Fall` "$x \setminus y$ endlich" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ endlich"
folgt via **213-5**: $y \cup (x \setminus y)$ endlich.

`3:` Via **5-22** gilt: $y \cup (x \setminus y) = y \cup x$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $y \cup x$ endlich.

`5:` Aus `4` "$y \cup x$ endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: x endlich.

`6:` Aus `VS` gleich "x unendlich$\ldots$"
folgt via **29-1(Def)**: $\neg(x \text{ endlich})$.

`Ende wfFallunterscheidung` $x \setminus y$ unendlich.

`c)` `VS` gleich $(x \text{ endlich}) \wedge (y \text{ unendlich})$.

`1:` Es gilt: $(x = y) \vee (x \neq y)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = y$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$x = y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y$ unendlich"
folgt: x unendlich.

`3.1:` Aus `2` "x unendlich"
folgt via **29-1(Def)**: $\neg(x \text{ endlich})$.

`3.2:` Nach `VS` gilt: x endlich.

`Ende wfFallunterscheidung` $x \neq y$.

<u>Beweis **312-8**</u> `d)` `VS` gleich p endlich.

`1.1:` Via **5-5** gilt: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\} \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"
folgt via **312-2**: α unendlich.

`3:` Aus `VS` gleich "p endlich" und
aus `2`"α unendlich"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $p \neq \alpha$.

`4:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" und
aus `3`"$p \neq \alpha$"
folgt via **5-15**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\}$"

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\} \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" und
aus `A1` gleich "$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{p\} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`e)`
Aus **EndlichkeitsAxiom**"0 endlich"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{0\} = \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

<u>Beweis</u> **312-8** `f)` `VS` gleich $(p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \wedge (y \text{ endlich})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \ldots$”
folgt via **312-2**: $(p \text{ Menge}) \wedge (p \subseteq x) \wedge (p \text{ unendlich})$.

`2.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots y$ endlich” und
aus `1`“$\ldots p$ unendlich”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $y \neq p$.

`2.2:` Aus `1`“p Menge$\ldots$”
folgt via **94-6**: $p \setminus y$ Menge.

`2.3:` Via **5-5** gilt: $p \setminus y \subseteq p$.

`2.4:` Aus `1`“$\ldots p$ unendlich” und
aus `VS` gleich “$\ldots y$ endlich”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $p \setminus y$ unendlich.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{p \neq y}$

`3.2:` Aus `2.3`“$p \setminus y \subseteq p$” und
aus `1`“$\ldots p \subseteq x \ldots$”
folgt via **0-6**: $p \setminus y \subseteq x$.

`4:` Aus `2.2`“$p \setminus y$ Menge”,
aus `3.2`“$p \setminus y \subseteq x$” und
aus `2.4`“$p \setminus y$ unendlich”
folgt via **312-2**: $\boxed{p \setminus y \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)}$

<u>Beweis **312-8**</u> `g)` `VS` gleich $p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$” und
aus **EndlichkeitsAxiom**“0 endlich”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $p \neq 0$.

`1.2:` Via **28-8** gilt: $\{q\}$ endlich.

`2.1:` Aus `1.1`

folgt: $\boxed{0 \neq p}$

`2.2:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$” und
aus `1.2`“$\{q\}$ endlich”

folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $\boxed{p \setminus \{q\} \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)}$

□

312-9. Aus $f : D \to B$ und $p \in \mathsf{ran}\, f$ - und nicht etwa $p \in B$ - folgt die Existenz eines $\Omega \in D$ mit $p = f(\Omega)$.

312-9(Satz)

a) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$p \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (p = f(\Omega))$".

b) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$\mathsf{ran}\, f \subseteq A$"
folgt "$f : D \to A$" *und* "$f : D \to B \cap A$".

Beweis **312-9** a) VS gleich $(f : D \to B) \wedge (p \in \mathsf{ran}\, f)$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

2: Aus 1"f Funktion…" und
aus VS gleich "$\ldots p \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **18-24**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (p = f(\Omega))$.

3: Aus 2 und
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (p = f(\Omega))$.

b) VS gleich $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq A)$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

2.1: Aus 1"$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \ldots$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{f : D \to A}$

2.2: Aus 1"$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$" und
aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq A$"
folgt via **2-12**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$.

3: Aus 1"$(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \ldots$" und
aus 2.2"$\mathsf{ran}\, f \subseteq B \cap A$"
folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{f : D \to B \cap A}$

□

312-10(AC). Aussagen **311-11** und **312-7(AC)** können in gefälliger, doch spezieller Weise kombiniert werden.

312-10(AC)(Satz)

Es gibt Ω, Ψ*, so dass gilt:*

`e.1)` $\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}$.

`e.2)` $\Psi : \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`e.3)` $\forall\alpha : ((0 \neq \alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ } \mathit{Menge})) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$.

`e.4)` $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Psi(\alpha) = \alpha \setminus \{\Omega(\alpha)\})$.

Beweis **312-10(AC)**

$$311.0(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists\Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$$
311-1(Def)

`1:` Via **312-7(AC)** gilt:
$\exists\Omega : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \wedge (\forall\gamma : (0 \neq \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \gamma))$.

`Thema2.1` $(0 \neq \alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})$.

`3:` Aus `Thema2.1`“$\ldots \alpha$ Menge”
folgt via **0-22**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`4:` Aus `Thema2.1`“$0 \neq \alpha \ldots$”,
aus `3`“$\alpha \in \mathcal{U}$” und
aus `1`“$\ldots \forall\gamma : (0 \neq \gamma \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Omega(\gamma) \in \gamma)$”
folgt: $\Omega(\alpha) \in \alpha$.

Ergo `Thema2.1`: `A1` “$\forall\alpha : ((0 \neq \alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$”

`2.2:` Aus `1`“$\ldots \Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U} \ldots$” und
aus **312-3**“$\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$”
folgt via **311-11**:
$(311.0(\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x), \{.\} \circ \Omega, \mathsf{stm}) : \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \setminus \{0\} \to \mathcal{P}(x))$
$\wedge(\forall\gamma : (0 \neq \gamma \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x))$
$\Rightarrow (311.0(\mathcal{P}_{\text{unendl}}(x), \{.\} \circ \Omega, \mathsf{stm})(\gamma) = \gamma \setminus \{\Omega(\gamma)\}))$.

...

Beweis **312-10(AC)** ...

3: Aus 1 "$\exists\Omega\ldots$"
folgt: $\exists\Psi:\Psi=\mathtt{311.0}(\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x),\{.\}\circ\Omega,\mathsf{stm})$.

4: Aus 3 und
aus 2.2
folgt: $(\Psi:\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\setminus\{0\}\to\mathcal{P}(x))$
$\wedge(\forall\gamma:(0\neq\gamma\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x))\Rightarrow(\Psi(\gamma)=\gamma\setminus\{\Omega(\gamma)\}))$.

5: Via **312-8** gilt: $\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\setminus\{0\}=\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

6: Aus 4 und
aus 5
folgt: $(\Psi:\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\to\mathcal{P}(x))$
$\wedge(\forall\gamma:(0\neq\gamma\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x))\Rightarrow(\Psi(\gamma)=\gamma\setminus\{\Omega(\gamma)\}))$.

Thema7 $\beta\in\mathsf{ran}\,\Psi$.

8: Aus 6 "$\Psi:\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\to\mathcal{P}(x)\ldots$" und
aus Thema7 "$\beta\in\mathsf{ran}\,\Psi$"
folgt via **312-9**: $\exists\Phi:(\Phi\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x))\wedge(\beta=\Psi(\Phi))$.

9: Aus 8 "$\ldots\Phi\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\ldots$"
folgt via **312-8**: $0\neq\Phi$.

10: Aus 9 "$0\neq\Phi$" und
aus 9 "$\ldots\Phi\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\ldots$" und
aus 6 "$\forall\gamma:(0\neq\gamma\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x))\Rightarrow(\Psi(\gamma)=\gamma\setminus\{\Omega(\gamma)\})$"
folgt: $\Psi(\Phi)=\Phi\setminus\{\Omega(\Phi)\}$.

11.1: Aus 8 "$\ldots\beta=\Psi(\Phi)$" und
aus 10
folgt: $\beta=\Phi\setminus\{\Omega(\Phi)\}$.

11.2: Aus 8 "$\ldots\Phi\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)\ldots$"
folgt via **312-8**: $\Phi\setminus\{\Omega(\Phi)\}\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

12: Aus 11.1 und
aus 11.2
folgt: $\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

Ergo Thema7: $\forall\beta:(\beta\in\mathsf{ran}\,\Psi)\Rightarrow(\beta\in\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 "$\mathsf{ran}\,\Psi\subseteq\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"

...

Beweis **312-10(AC)** ...

8: Aus 6 "$\Psi : \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \to \mathcal{P}(x) \ldots$" und
aus A2 gleich "$\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"
folgt via **312-9**: $\Psi : \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

Thema9 $\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

10: Aus Thema9 "$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$"
folgt via **312-8**: $0 \neq \alpha$.

11: Aus 10 "$0 \neq \alpha$",
aus Thema9 "$\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" und
aus 6 "$\ldots \forall \gamma : (0 \neq \gamma \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Psi(\gamma) = \gamma \setminus \{\Omega(\gamma)\})$"
folgt: $\Psi(\alpha) = \alpha \setminus \{\Omega(\alpha)\}$.

Ergo Thema9: A3 "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Psi(\alpha) = \alpha \setminus \{\Omega(\alpha)\})$"

10: Aus 1 "$\exists \Omega \ldots$",
aus 3 "$\exists \Psi \ldots$",
aus 1 "$\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U} \ldots$",
aus 8 "$\ldots \Psi : \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$",
aus A1 gleich "$\forall \alpha : ((0 \neq \alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$" und
aus A3 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Psi(\alpha) = \alpha \setminus \{\Omega(\alpha)\})$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \wedge (\Psi : \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \wedge (\forall \alpha : ((0 \neq \alpha \subseteq x) \wedge (\alpha \text{ Menge})) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Psi(\alpha) = \alpha \setminus \{\Omega(\alpha)\})).$$

$\square$

312-11(AC). In Kombination von **308-15** und **312-10(AC)** ergibt sich *für unendliche Mengen* die Existenz einer Abbildung $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$ mit $\Psi(1+n) = \Psi(n) \setminus \{\Omega(\Psi(n))\}$, wobei Ω die in **312-10(AC)** postulierten Eigenschaften hat, die an das Auswahlaxiom erinnern.

312-11(AC)(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow\!)$ *x unendlich.*

$\rightarrow\!)$ *x Menge.*

Dann gibt es Ω, Ψ, so dass gilt:

`e.1)` $\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}$.

`e.2)` $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

`e.3)` $\forall\alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$.

`e.4)` $\Psi(0) = x$.

`e.5)` $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Omega(\Psi(\alpha))\})$.

Beweis **312-11(AC)**

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "x unendlich" und
aus $\rightarrow\!)$ "x Menge"
folgt via **312-2**: $x \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

`1.2:` Via **312-10(AC)** gilt:

$$\begin{aligned}&\exists\Omega,\Phi :\\ &(\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U})\\ &\wedge(\Phi : \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x))\\ &\wedge(\forall\beta : ((0 \neq \beta \subseteq x) \wedge (\beta \text{ Menge})) \Rightarrow (\Omega(\beta) \in \beta))\\ &\wedge(\forall\beta : (\beta \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Phi(\beta) = \beta \setminus \{\Omega(\beta)\})).\end{aligned}$$

`2:` Aus `1.1`"$x \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$" und
aus `1.2`"$\ldots \Phi : \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \ldots$"
folgt via **308-15**:

$$\begin{aligned}&(\mathtt{rf0}\Phi x : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)) \wedge (\mathtt{rf0}\Phi x(0) = x)\\ &\wedge(\forall\gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf0}\Phi x(1+\gamma) = \Phi(\mathtt{rf0}\Phi x(\gamma)))).\end{aligned}$$

...

Beweis **312-11(AC)** ...

`3:` Aus `1.2`"$\exists \ldots \Phi \ldots$" und
aus →) "x Menge"
folgt: $\exists \Psi : \Psi = \mathtt{rf0}\Phi x$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Psi = \mathtt{rf0}\Phi x$" und
aus `2`
folgt: $(\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \wedge (\Psi(0) = x)$
$\wedge(\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\gamma) = \Phi(\Psi(\gamma))))$.

`Thema5.1` $\alpha \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `4`"$\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \ldots$" und
aus `Thema5.1`"$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **21-4**: $\Psi(\alpha) \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$.

`7:` Aus `6`"$\Psi(\alpha) \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)$" und
aus `1.2`"$\ldots \forall \beta : (\beta \in \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \Rightarrow (\Phi(\beta) = \beta \setminus \{\Omega(\beta)\})$"
folgt: $\Phi(\Psi(\alpha)) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Omega(\Psi(\alpha))\}$.

`8:` Aus `Thema5.1`"$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus `4`"$\ldots \forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\gamma) = \Phi(\Psi(\gamma)))$"
folgt: $\Psi(1+\alpha) = \Phi(\Psi(\alpha))$

`9:` Aus `8` und
aus `7`
folgt: $\Psi(1+\alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Omega(\Psi(\alpha))\}$.

Ergo `Thema5.1`: `A1` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Omega(\Psi(\alpha))\})$"

...

Beweis **312-11(AC)** ...

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $0 \neq \alpha \subseteq x.$

`6`: Aus `Thema5.2`"$\ldots \alpha \subseteq x$" und
aus →) "x Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: α Menge.

`7`: Aus `Thema5.2`"$0 \neq \alpha \subseteq x$",
aus `6`"α Menge" und
aus `1.2`"$\ldots \forall \beta : ((0 \neq \beta \subseteq x) \wedge (\beta \text{ Menge}))$
$\Rightarrow (\Omega(\beta) \in \beta)$"
folgt: $\Omega(\alpha) \in \alpha.$

Ergo `Thema5.2`: `A2` | "$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)$"

`6`: Aus `1.2`"$\exists \Omega : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \ldots$",
aus `A2` gleich "$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha)) \ldots$",
aus `3`"$\exists \Psi \ldots$",
aus `4`"$(\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)) \wedge (\Psi(0) = x) \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1 + \alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Omega(\Psi(\alpha))\})$"
folgt:

$$\exists \Omega, \Psi : (\Omega : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \wedge (\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x))$$
$$\wedge (\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Omega(\alpha) \in \alpha))$$
$$\wedge (\Psi(0) = x)$$
$$\wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1 + \alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Omega(\Psi(\alpha))\})).$$

□

Mengenlehre: paarweise disjunkt. wirkt disjunktiv. $\{(p, f(p))\}$, f Funktion. Ist x eine unendliche Menge, so gibt es eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to x$.

Ersterstellung: 21/09/14 **Letzte Änderung: 25/09/14**

313-1. Paarweise disjunkte Klassen spielen immer wieder eine bedeutende Rolle. Für den zweiten Begriff kann ich meinem Kenntnisstand nach nicht auf die Literatur zurück greifen.

313-1(Definition)

1) "x **paarweise disjunkt**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : (\alpha, \beta \in x) \Rightarrow ((\alpha = \beta) \vee (\alpha \cap \beta = 0)).$$

2) "x **wirkt disjunktiv**" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta : (((\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in x) \wedge (\alpha \neq \gamma)) \Rightarrow (\beta \cap \delta = 0).$$

313-2. Aus $p \notin \mathsf{dom}\, x$ folgt jedenfalls $\{(p, x(p))\} \subseteq x$.

<u>**313-2(Satz)**</u>

a) *"$(p, x(p))$ Unmenge" genau dann, wenn "$p \notin \mathsf{dom}\, x$".*

b) *"$\{(p, x(p))\} = 0$" genau dann, wenn "$(p, x(p)) \notin \{(p, x(p))\}$" genau dann, wenn "$p \notin \mathsf{dom}\, x$".*

c) *"$0 \neq \{(p, x(p))\}$" genau dann, wenn "$(p, x(p)) \in \{(p, x(p))\}$" genau dann, wenn "$p \in \mathsf{dom}\, x$".*

d) *Aus "$p \notin \mathsf{dom}\, x$" folgt "$\{(p, x(p))\} \subseteq x$".*

<u>Beweis</u> **313-2** a)

1: Via **311-3** gilt: $((p, x(p))\text{ Menge}) \Leftrightarrow (p \in \mathsf{dom}\, x)$.

2: Aus 1
folgt: $((p, x(p))\text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (p \notin \mathsf{dom}\, x)$.

b) $\boxed{\boxed{\text{i)} \Rightarrow \text{ii)}}}$ VS gleich $\{(p, x(p))\} = 0$.

1: Via **0-19** gilt: $(p, x(p)) \notin 0$.

2: Aus 1 und
aus VS
folgt: $(p, x(p)) \notin \{(p, x(p))\}$.

b) $\boxed{\boxed{\text{ii)} \Rightarrow \text{iii)}}}$ VS gleich $(p, x(p)) \notin \{(p, x(p))\}$.

1: Aus VS gleich "$(p, x(p)) \notin \{(p, x(p))\}$"
folgt via **1-4**: $(p, x(p))$ Unmenge.

2: Aus 1"$(p, x(p))$ Unmenge"
folgt via des bereits bewiesenen a): $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

b) $\boxed{\boxed{\text{iii)} \Rightarrow \text{i)}}}$ VS gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

1: Aus VS gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $(p, x(p))$ Unmenge.

2: Aus 1"$(p, x(p))$ Unmenge"
folgt via **1-4**: $\{(p, x(p))\} = 0$.

<u>Beweis **313-2**</u> `c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$$((p, x(p)) \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((p, x(p)) \notin \{(p, x(p))\}) \Leftrightarrow (p \notin \mathsf{dom}\, x).$$

`2:` Aus `2`
folgt: $$((p, x(p)) \text{ Menge}) \Leftrightarrow ((p, x(p)) \in \{(p, x(p))\}) \Leftrightarrow (p \in \mathsf{dom}\, x).$$

`d)` `VS` gleich $p \notin \mathsf{dom}\, x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{(p, x(p))\} = 0$.

`2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\{(p, x(p))\} \subseteq x$.

$\square$

313-3. Falls $0 \neq x$ und $x \cap y = 0$, dann $x \neq y$.

313-3(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x$" *und* "$x \cap y = 0$" *folgt* "$x \neq y$".

b) *Aus* "$0 \neq x$" *und* "$y \cap x = 0$" *folgt* "$x \neq y$".

c) *Aus* "$x \subseteq y$" *folgt* "$x \cap (z \setminus y) = 0$".

Beweis **313-3** `a)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (x \cap y = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \cap y = 0$"
folgt: $x \cap y \neq x$.

`2:` Aus `1`"$x \cap y \neq x$"
folgt via **2-11**: $x \not\subseteq y$.

`3:` Aus `2`"$x \not\subseteq y$"
folgt via **0-10**: $x \neq y$.

`b)` `VS` gleich $(0 \neq x) \wedge (y \cap x = 0)$.

`1:` Via **KG**$\cap$ gilt: $x \cap y = y \cap x$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich "$\ldots y \cap x = 0$"
folgt: $x \cap y = 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \ldots$" und
aus `2`"$x \cap y = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \neq y$.

`c)` `VS` gleich $x \subseteq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \subseteq y$"
folgt via **3-4**: $y^C \subseteq x^C$.

`2:` Aus `1`"$y^C \subseteq x^C$"
folgt via **158-4**: $(x \cap z) \cap y^C \subseteq (x \cap z) \cap x^C$.

`3:` $x \cap (z \setminus y) \stackrel{\textbf{296-11}}{=} (x \cap z) \setminus y \stackrel{\textbf{5-10}}{=} (x \cap z) \cap y^C \stackrel{2}{\subseteq} (x \cap z) \cap x^C \stackrel{\textbf{KG}\cap}{=} (z \cap x) \cap x^C$
$\stackrel{\textbf{AG}\cap}{=} z \cap (x \cap x^C) \stackrel{\textbf{3-6}}{=} z \cap 0 \stackrel{\textbf{2-17}}{=} 0$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \cap (z \setminus y) = 0$.

$\square$

313-4. Ist f eine Funktion, so gilt *unabhängig davon, ob* $p \in \mathsf{dom}\, f$ *oder nicht* die Gleichung $f = \{(p, f(p))\} \cup (f \setminus \{(p, f(p))\})$.

313-4(Satz)

Aus "f Funktion" folgt "$f = \{(p, f(p))\} \cup (f \setminus \{(p, f(p))\})$".

Beweis **313-4** `VS` gleich f Funktion.

`1:` Aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **261-1**: $\{(p, f(p))\} \subseteq f$.

`2:` Aus `1`"$\{(p, f(p))\} \subseteq f$"
folgt via **258-32**: $\{(p, f(p))\} \cup (f \setminus \{(p, f(p))\}) = f$.

$\square$

313-5. Ob eine Funktion disjunktiv wirkt kann an Hand des Definitions-Bereichs und der Funktions-Werte von f entschieden werden.

313-5(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` f *wirkt disjunktiv.*

`ii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$.

<u>Beweis</u> **313-5** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich f wirkt disjunktiv.

`Thema1` $(\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)$.

2: Aus →) “ f Funktion ” und
aus `Thema1` “ $\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f$ ”
folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)) \in f$.

3: Aus `VS` gleich “ f wirkt disjunktiv ” ,
aus 2 “ $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)) \in f$ ” und
aus `Thema1` “ $\ldots \alpha \neq \beta$ ”
folgt via **313-1(Def)**: $f(\alpha) \cap f(\beta) = 0$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$.

`Thema1` $((\gamma, \delta), (\epsilon, \xi) \in f) \wedge (\gamma \neq \epsilon)$.

2.1: Aus `Thema1` “ $(\gamma, \delta), (\epsilon, \xi) \in f \ldots$ ”
folgt via **7-5**: $\gamma, \epsilon \in \mathsf{dom}\, f$.

2.2: Aus →) “ f Funktion ” und
aus `Thema1` “ $(\gamma, \delta), (\epsilon, \xi) \in f \ldots$ ”
folgt via **18-20**: $(\delta = f(\gamma)) \wedge (\xi = f(\epsilon))$.

3: Aus 2.1 “ $\gamma, \epsilon \in \mathsf{dom}\, f$ ” ,
aus `Thema1` “ $\ldots \gamma \neq \epsilon$ ” und
aus `VS` gleich “ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta))$
$\Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$ ”
folgt: $f(\gamma) \cap f(\epsilon) = 0$.

4: Aus 3 und
aus 2.2
folgt: $\delta \cap \xi = 0$.

Ergo `Thema1`: $\forall \gamma, \delta, \epsilon, \xi : (((\gamma, \delta), (\epsilon, \xi) \in f) \wedge (\gamma \neq \epsilon)) \Rightarrow (\delta \cap \xi = 0)$.

Konsequenz via **313-1(Def)**: f wirkt disjunktiv.

□

313-6. Falls $p \in \mathsf{dom}\, f$, f Funktion, so folgt $p \in f^{-1}[\{f(p)\}]$.

313-6(Satz)

Aus "f Funktion" und "$p \in \mathsf{dom}\, f$" folgt "$p \in f^{-1}[\{f(p)\}]$".

Beweis **313-6** `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)$"
folgt via **18-22**: $(p, f(p)) \in f$.

`2`: Aus `1` "$(p, f(p)) \in f$"
folgt via **12-7**: $p \in f^{-1}[\{f(p)\}]$.

□

313-7. Als Hilfsresultat wird Hinreichendes für $x(p) \neq x(r)$ bewiesen.

313-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))$.

$\rightarrow\!)$ $x(q) = 0$.

$\rightarrow\!)$ $q \neq r$.

Dann folgt "$x(q) \neq x(r)$".

Beweis **313-7**

`1.1:` Es gilt: $(p \neq q) \vee (p = q)$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $p \neq q$.

`2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$x(q) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $x(q)$ Menge.

`3:` Aus 2"$x(q)$ Menge"
folgt via **17-5**: $q \in \mathsf{dom}\, x$.

`4:` Aus `1.1.1.Fall`"$p \neq q$",
aus 3"$q \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))$"
folgt: $0 \neq x(q)$.

`5:` Nach $\rightarrow\!)$ gilt: $x(q) = 0$.

`Ende wfFallunterscheidung` `A1` | "$p = q$"

`1.2:` Aus `A1` und
aus $\rightarrow\!)$ "$q \neq r$"
folgt: $p \neq r$.

...

Beweis **313-7** . . .

2: Es gilt: $(r \in \mathsf{dom}\, x) \vee (r \notin \mathsf{dom}\, x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $r \in \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 1.2 "$p \neq r$",
aus 2.1.1.Fall "$r \in \mathsf{dom}\, x$" und
aus →) "$\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, x) \Rightarrow (0 \neq x(\alpha))$"
folgt: $0 \neq x(r)$.

4: Aus →) "$x(q) = 0$" und
aus 3
folgt: $x(q) \neq x(r)$.

`2.2.Fall` $r \notin \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 2.2.Fall "$r \notin \mathsf{dom}\, x$"
folgt via **17-4**: $x(r) = \mathcal{U}$.

4: Aus →) "$x(q) = 0$" und
aus **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt: $x(q) \neq \mathcal{U}$.

5: Aus 4 und
aus 3
folgt: $x(q) \neq x(r)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x(q) \neq x(r)$.

□

313-8. Ist $\mathsf{ran}\, f$ einer Funktion f paarweise disjunkt, so folgt unter Zusatzbedingungen die Injektivität von f.

313-8(Satz)

a) *Aus "f Funktion"*
und "f wirkt disjunktiv"
und "$0 \notin \mathsf{ran}\, f$" *folgt "$f$ injektiv".*

b) *Aus "f Funktion"*
und "f wirkt disjunktiv"
und "$\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$" *folgt "$f$ injektiv".*

Beweis **313-8** `a)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ wirkt disjunktiv}) \wedge (0 \notin \mathsf{ran}\, f)$.

`Thema1.1` $(\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))$.

`2:` Es gilt: $(\alpha \neq \beta) \vee (\alpha = \beta)$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\alpha \neq \beta$.

`3:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ wirkt disjunktiv}) \ldots$", aus `Thema1.1` "$\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und aus `2.1.Fall` "$\alpha \neq \beta$" folgt via **313-5**: $f(\alpha) \cap f(\beta) = 0$.

`4:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und aus `Thema1.1` "$\alpha \ldots \in \mathsf{dom}\, f$" folgt via **18-22**: $f(\alpha) \in \mathsf{ran}\, f$.

`5:` Aus `4` "$f(\alpha) \in \mathsf{ran}\, f$" und aus `VS` gleich "$\ldots 0 \notin \mathsf{ran}\, f$" folgt via **0-1**: $f(\alpha) \neq 0$.

`6:` Aus `5` folgt: $0 \neq f(\alpha)$.

`7:` Aus `6` "$0 \neq f(\alpha)$" und aus `3` "$f(\alpha) \cap f(\beta) = 0$" folgt via **313-3**: $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

`8:` Nach `Thema1.1` gilt: $f(\alpha) = f(\beta)$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\alpha))) \Rightarrow (\alpha = \beta)$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion…" und aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\alpha))) \Rightarrow (\alpha = \beta)$" folgt via **19-2**: f injektiv.

Beweis **313-8** `b)` `VS` gleich

$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ wirkt disjunktiv}) \wedge (\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha)))$.

`Thema1.1` $(\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\gamma) = f(\delta))$.

`2:` Es gilt: $(\gamma \neq \delta) \vee (\gamma = \delta)$.

`wfFallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\gamma \neq \delta$.

`3:` Aus `VS` gleich "$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ wirkt disjunktiv}) \ldots$",
aus `Thema1.1` "$\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus `2.1.Fall` "$\gamma \neq \delta$"
folgt via **313-5**: $f(\gamma) \cap f(\delta) = 0$.

`4.1:` Es gilt: $(f(\gamma) = 0) \vee (0 \neq f(\gamma))$.

`Fallunterscheidung`

`4.1.1.Fall` $f(\gamma) = 0$.

Aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$",
aus `4.1.1.Fall` "$f(\gamma) = 0$" und
aus `2.1.Fall` "$\gamma \neq \delta$"
folgt via **313-7**: $f(\gamma) \neq f(\delta)$.

`4.1.2.Fall` $0 \neq f(\gamma)$.

Aus `4.1.2.Fall` "$0 \neq f(\gamma)$" und
aus `3` "$f(\gamma) \cap f(\delta) = 0$"
folgt via **313-3**: $f(\gamma) \neq f(\delta)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | "$f(\gamma) \neq f(\delta)$"

`4.2:` Nach `A1` gilt: $f(\gamma) \neq f(\delta)$.

`5:` Nach `Thema1.1` gilt: $f(\gamma) = f(\delta)$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\gamma = \delta$.

Ergo `Thema1.1`: `A2` | "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\gamma) = f(\delta))) \Rightarrow (\gamma = \delta)$"

...

<u>Beweis</u> **<u>313-8</u>** `b)` `VS` gleich

$$(f \text{ Funktion}) \wedge (f \text{ wirkt disjunktiv}) \wedge (\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))).$$

...

`1.2:` Aus `VS` gleich "f Funktion... " und
aus `A2` gleich "$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\gamma) = f(\delta))) \Rightarrow (\gamma = \delta)$"
folgt via **19-2**: f injektiv.

□

313-9. Die offenbar sehr technischen Definitionen haben definitiv vorbereitenden Charakter.

313-9(Definition)

1) $\mathtt{313.0}(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(1+\omega) = x(0) \setminus \bigcup(y[1+\omega]))\}$.

2) $\mathtt{313.1}(x,y,z) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \cap y(z) = 0)\}$.

RECH-**Notation**.

313-10. Hier werden einige Eigenschaften der Klassen $313.0(x,y)$, $313.1(x,y,z)$ präsentiert.

313-10(Satz)

a) $313.0(x,y) \subseteq \mathbb{N}$.

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x(1+n) = x(0) \setminus \bigcup(y[1+n])$" *folgt* "$n \in 313.0(x,y)$".

c) $313.1(x,y,z) \subseteq \mathbb{N}$.

d) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$x(n) \cap y(z) = 0$" *folgt* "$n \in 313.1(x,y,z)$".

$313.0(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(1+\omega) = x(0) \setminus \bigcup(y[1+\omega]))\}$ **313-9(Def)**

$313.1(x,y,z) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \cap y(z) = 0)\}$ **313-9(Def)**

RECH-**Notation**.

Beweis **313-10** `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in 313.0(x,y)$.
Aus `Thema1`	
folgt via **313-9(Def)**:	$\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 313.0(x,y)) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $313.0(x,y) \subseteq \mathbb{N}$.

`b)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x(1+n) = x(0) \setminus \bigcup(y[1+n]))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x(1+n) = x(0) \setminus \bigcup(y[1+n]))$" und
aus `1`"n Menge"
folgt via **313-9(Def)**: $n \in 313.0(x,y)$.

`c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in 313.1(x,y,z)$.
Aus `Thema1`	
folgt via **313-9(Def)**:	$\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in 313.1(x,y,z)) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $313.1(x,y,z) \subseteq \mathbb{N}$.

`d)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (x(n) \cap y(z) = 0)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: n Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$(n \in \mathbb{N}) \wedge (x(n) \cap y(z) = 0)$" und
aus `1`"n Menge"
folgt via **313-9(Def)**: $n \in 313.1(x,y,z)$.

$\square$

313-11. Nicht nur für Folgen f sind die Aussagen über natürliche Zahlen und f von Interesse.

313-11(Satz)

a) *Aus* "$0 \in \mathsf{dom}\, f$" *und* "f *Funktion*" *folgt* "$\bigcup(f[1]) = f(0)$".

b) *Aus* "$n, m \in \mathbb{N}$"
und "$n < m$"
und "$n \in \mathsf{dom}\, f$"
und "f *Funktion*"
folgt "$f(n) \subseteq \bigcup(f[m])$" *und* "$f(n) \cap (x \setminus \bigcup(f[m])) = 0$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *und* "$n \in \mathsf{dom}\, f$" *und* "f *Funktion*"
folgt "$f(n) \subseteq \bigcup(f[1+n])$" *und* "$f(n) \cap (x \setminus \bigcup(f[1+n])) = 0$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **313-11** `VS` gleich $(0 \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$.

1: Aus `VS` gleich "$(0 \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$"
folgt via **262-4**: $\bigcup(f[\{0\}]) = f(0)$.

2: Aus 1 und
aus **95-1(Def)** "$1 = \{0\}$"
folgt: $\bigcup(f[1]) = f(0)$.

<u>Beweis **313-11**</u> `b)` `VS` gleich $(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(n, m \in \mathbb{N}) \wedge (n < m) \ldots$"
folgt via **197-5**: $n \in m$.

`2:` Aus `1`"$n \in m$"
folgt via **1-8**: $\{n\} \subseteq m$.

`3:` Aus `2`"$\{n\} \subseteq m$"
folgt via **8-9**: $f[\{n\}] \subseteq f[m]$.

`4:` Aus `3`"$f[\{n\}] \subseteq f[m]$"
folgt via **1-15**: $\bigcup(f[\{n\}]) \subseteq \bigcup(f[m])$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots (n \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$"
folgt via **262-4**: $\bigcup(f[\{n\}]) = f(n)$.

`6:` Aus `5` und
aus `4`
folgt: $\boxed{f(n) \subseteq \bigcup(f[m])}$

`7:` Aus `6`"$f(n) \subseteq \bigcup(f[m])$"
folgt via **313-3**: $\boxed{f(n) \cap (x \setminus \bigcup(f[m])) = 0}$

`c)` `VS` gleich $(n \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + n \in \mathbb{N}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **239-5**: $n < 1 + n$.

`2:` Aus `VS` gleich "$n \in \mathbb{N} \ldots$",
aus `1.1`"$1 + n \in \mathbb{N}$",
aus `1.2`"$n < 1 + n$" und
aus `VS` gleich "$\ldots (n \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (f \text{ Funktion})$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$(f(n) \subseteq \bigcup(f[1+n])) \wedge (f(n) \cap (x \setminus \bigcup(f[1+n])) = 0).$$

□

313-12. Gelegentlich ist es hilfreich, abgeänderte Versionen vom **IS**$\mathbb{Z}$ und von **236-2,3** einzusetzen.

313-12(Satz)

a) *Aus* "$x \in \mathbb{Z} \cap E$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in E \cap \{x, \ldots\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$" *folgt* "$\{x, \ldots\} \subseteq E$".

b) *Aus* "$x \in \mathbb{Z} \cap E$" *und* "$\forall \alpha : (x \leq \alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$" *folgt* "$\{x, \ldots\} \subseteq E$".

c) *Aus* "$x \in E \subseteq \mathbb{Z}$" *und* "$\forall \alpha : (x \leq \alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$" *folgt* "$\{x, \ldots\} \subseteq E$".

d) *Aus* "$x \in E \subseteq \mathbb{N}$" *und* "$\forall \alpha : (x \leq \alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$" *folgt* "$\{x, \ldots\} \subseteq E$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **313-12** a) VS gleich $(x \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in E \cap \{x, \ldots\}) \Rightarrow (1 + \alpha \in E))$.

1.1: Via **169-4** gilt: $\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$.

1.2: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{Z} \cap E \ldots$"
folgt via **2-2**: $x \in \mathbb{Z}$.

2.1: Aus 1"$\{x, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **158-4**: $E \cap \{x, \ldots\} \subseteq E \cap \mathbb{Z}$.

2.2: Aus 1.2"$x \in \mathbb{Z}$"
folgt via **237-2**: $x \in \{x, \ldots\}$.

3: Aus VS gleich "$x \in \mathbb{Z} \cap E \ldots$" und
aus 2.2"$x \in \{x, \ldots\}$"
folgt via **2-2**: $x \in (\mathbb{Z} \cap E) \cap \{x, \ldots\}$.

4: Via **AG**$\cap$ gilt: $\mathbb{Z} \cap (E \cap \{x, \ldots\}) = (\mathbb{Z} \cap E) \cap \{x, \ldots\}$.

5: Aus 3 und
aus 4
folgt: $x \in \mathbb{Z} \cap (E \cap \{x, \ldots\})$.

...

<u>Beweis **313-12**</u> `a)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{Z}\cap E)\wedge(\forall\alpha : (\alpha \in E\cap\{x,\ldots\}) \Rightarrow (1+\alpha \in E))$.

...

$\boxed{\texttt{Thema6.1}}$ $\beta \in \mathbb{Z} \cap (E \cap \{x,\ldots\})$.

`7.1:` Aus `6.1`“$\beta \in \mathbb{Z} \cap (E \cap \{x,\ldots\})$”
folgt via **2-2**: $\beta \in E \cap \{x,\ldots\}$.

`7.2:` Aus `6.1`“$\beta \in E \cap \{x,\ldots\}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots\forall\alpha : (\alpha \in E \cap \{x,\ldots\}) \Rightarrow (1+\alpha \in E)$”
folgt: $1+\beta \in E$.

`8:` Aus `7.1`“$\beta \in E \cap \{x,\ldots\}$”
folgt via **2-2**: $\beta \in \{x,\ldots\}$.

`9:` Aus `8`“$\beta \in \{x,\ldots\}$”
folgt via **169-12**: $1+\beta \in \{x,\ldots\}$.

`10:` Aus `7.2`“$1+\beta \in E$” und
aus `9`“$1+\beta \in \{x,\ldots\}$”
folgt via **2-2**: $1+\beta \in E \cap \{x,\ldots\}$.

Ergo `Thema6.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall\beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap (E \cap \{x,\ldots\})) \Rightarrow (1+\beta \in E \cap \{x,\ldots\})\text{”}}$

`6.2:` Aus `5`“$x \in \mathbb{Z} \cap (E \cap \{x,\ldots\})$” und
aus `A1` gleich “$\forall\beta : (\beta \in \mathbb{Z} \cap (E \cap \{x,\ldots\})) \Rightarrow (1+\beta \in E \cap \{x,\ldots\})$”
folgt via **IS**$\mathbb{Z}$: $\{x,\ldots\} \subseteq E \cap \{x,\ldots\}$.

`7:` Aus `6.2`“$\{x,\ldots\} \subseteq E \cap \{x,\ldots\}$”
folgt via **158-1**: $\{x,\ldots\} \subseteq E$.

<u>Beweis **313-12**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{Z} \cap E) \wedge (\forall \alpha : (x \leq \alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E))$.

`Thema1.1` $\beta \in E \cap \{x, \ldots\}$.

`2:` Aus `Thema1.1`“$\beta \in E \cap \{x, \ldots\}$”
folgt via **2-2**: $(\beta \in E) \wedge (\beta \in \{x, \ldots\})$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \beta \in \{x, \ldots\}$”
folgt via **169-2**: $x \leq \beta \in \mathbb{Z}$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \beta \in \mathbb{Z}$” und
aus `2`“$\beta \in E \ldots$”
folgt via **2-2**: $\beta \in \mathbb{Z} \cap E$.

`5:` Aus `3`“$x \leq \beta \ldots$”,
aus `4`“$\beta \in \mathbb{Z} \cap E$” und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (x \leq \alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$”
folgt: $1 + \beta \in E$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` | “$\forall \beta : (\beta \in E \cap \{x, \ldots\}) \Rightarrow (1 + \beta \in E)$”

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \in \mathbb{Z} \cap E \ldots$” und
aus `A1` gleich “$\forall \beta : (\beta \in E \cap \{x, \ldots\}) \Rightarrow (1 + \beta \in E)$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\{x, \ldots\} \subseteq E$.

`c)` `VS` gleich $(x \in E \subseteq \mathbb{Z}) \wedge (\forall \alpha : (x \leq \alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E))$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots E \subseteq \mathbb{Z} \ldots$”
folgt via **2-10**: $\mathbb{Z} \cap E = E$.

`2.1:` Aus `1` und
aus `VS` gleich “$x \in E \ldots$”
folgt: $x \in \mathbb{Z} \cap E$.

`2.2:` Aus `1` und
aus `VS` gleich “$\ldots \forall \alpha : (x \leq \alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$”
folgt: $\forall \alpha : (x \leq \alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$.

`3:` Aus `2.1`“$x \in \mathbb{Z} \cap E$” und
aus `2.2`“$\forall \alpha : (x \leq \alpha \in \mathbb{Z} \cap E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\{x, \ldots\} \subseteq E$.

<u>Beweis **313-12**</u> `d)` `VS` gleich $(x \in E \subseteq \mathbb{N}) \wedge (\forall \alpha : (x \leq \alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{N} \ldots$" und
aus **164-4**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$"
folgt via **0-6**: $E \subseteq \mathbb{Z}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \in E \ldots$",
aus `1`"$E \subseteq \mathbb{Z}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (x \leq \alpha \in E) \Rightarrow (1 + \alpha \in E)$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\{x, \ldots\} \subseteq E$.

□

313-13. Nun wird eine Rekursion untersucht.

313-13(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$.

Dann folgt:

a) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+\alpha]))$.

b) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap x(\beta) = 0)$.

Beweis **313-13**

$\mathsf{313.0}(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(1+\omega) = x(0) \setminus \bigcup(y[1+\omega]))\}$ **313-9(Def)**

$\mathsf{313.1}(x,y,z) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \cap y(z) = 0)\}$ **313-9(Def)**

---

a)

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(0) \setminus f(\alpha))$”
folgt: $x(1+0) = x(0) \setminus f(0)$.

`1.2:` Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$” und
aus $\rightarrow\!)$ “$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$”
folgt: $0 \in \mathsf{dom}\, f$.

`1.3:` Aus $+$**schola**“$1+0=1$”
folgt: $f[1] = f[1+0]$.

`2:` Aus `1.2`“$0 \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus $\rightarrow\!)$ “f Funktion”
folgt via **313-11**: $\bigcup(f[1]) = f(0)$.

`3:` Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $x(1+0) = x(0) \setminus \bigcup(f[1])$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.3`
folgt: $x(1+0) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+0])$.

...

<u>Beweis</u> **313-13** `a)` ...

`5:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `4`"$x(1+0) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+0])$"
folgt via **313-10**: `A1` | "$0 \in \mathsf{313.0}(x,f)$"

`1.2:` Via **313-10** xilt: $\mathsf{313.0}(x,f) \subseteq \mathbb{N}$.

`Thema1.3` $\beta \in \mathsf{313.0}(x,f)$.

`2.1:` Aus $\rightarrow\!)$"f Funktion"
folgt via **259-16**: $f[\{1+\beta\}] = \{f(1+\beta)\}$.

`2.2:` Aus `Thema1.3`
folgt via **313-9(Def)**:
$(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (x(1+\beta) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+\beta]))$.

`3:` Aus `2.2`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1+\beta \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `3`"$1+\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via $\mathsf{A}\mathbb{N}$**Axiom**: $1+(1+\beta) = \{1+\beta\} \cup (1+\beta)$.

`4.2:` Aus `3`"$1+\beta \in \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow\!)$"$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$"
folgt: $1+\beta \in \mathsf{dom}\, f$.

`4.3:` Aus `3`"$1+\beta \in \mathbb{N}$" und
aus $\rightarrow\!)$"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$"
folgt: $x(1+(1+\beta)) = x(1+\beta) \setminus f(1+\beta)$.

`5.1:` Aus `4.2`"$1+\beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-5**: $f(1+\beta)$ Menge.

`5.2:` Aus `4.3` und
aus `2.2`"$\ldots x(1+\beta) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+\beta])$"
folgt:
$x(1+(1+\beta)) = (x(0) \setminus \bigcup(f[1+\beta])) \setminus (\bigcup(f[1+(1+\beta)]))$.

...

...

<u>Beweis **313-13**</u> `a)` ...

`Thema1.3` $\qquad \beta \in \mathsf{313.0}(x, f)$.

...

`6`: Aus `5.1` "$f(1+\beta)$ Menge"
folgt via **1-14**: $\qquad \bigcup\{f(1+\beta)\} = f(1+\beta)$.

`7`: $\bigcup(f[1+(1+\beta)]) \stackrel{4.1}{=} \bigcup(f[\{1+\beta\} \cup (1+\beta)])$
$\stackrel{9-8}{=} \bigcup(f[\{1+\beta\}] \cup f[1+\beta]) \stackrel{2.1}{=} \bigcup(\{f(1+\beta)\} \cup f[1+\beta])$
$\stackrel{2-34}{=} (\bigcup\{f(1+\beta)\}) \cup (\bigcup(f[1+\beta]))$
$\stackrel{6}{=} f(1+\beta) \cup \bigcup(f[1+\beta])$.

`8`: Aus `7`
folgt: $\qquad \bigcup(f[1+(1+\beta)]) = f(1+\beta) \cup \bigcup(f[1+\beta])$.

`9`: Via **2-7** xilt: $\qquad \bigcup(f[1+\beta]) \subseteq f(1+\beta) \cup \bigcup(f[1+\beta])$.

`10`: Aus `9` und
aus `8`
folgt: $\qquad \bigcup(f[1+\beta]) \subseteq \bigcup(f[1+(1+\beta)])$.

`11`: Aus `10` "$\bigcup(f[1+\beta]) \subseteq \bigcup(f[1+(1+\beta)])$"
folgt via **2-10**:
$\bigcup(f[1+(1+\beta)]) = (\bigcup(f[1+\beta])) \cup (\bigcup(f[1+(1+\beta)]))$.

`12`: $x(1+(1+\beta)) \stackrel{5.2}{=} (x(0) \setminus \bigcup(f[1+\beta])) \setminus (\bigcup(f[1+(1+\beta)]))$
$\stackrel{5-12}{=} x(0) \setminus ((\bigcup(f[1+\beta])) \cup (\bigcup(f[1+(1+\beta)])))$
$\stackrel{11}{=} x(0) \setminus \bigcup(f[1+(1+\beta)])$.

`13`: Aus `3` "$1+\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `12` "$x(1+(1+\beta)) = \ldots = x(0) \setminus \bigcup(f[1+(1+\beta)])$"
folgt via **313-10**: $\qquad 1+\beta \in \mathsf{313.0}(x, f)$.

Ergo `Thema1.3`: $\qquad$ `A2` | "$\forall \beta : (\beta \in \mathsf{313.0}(x, f)) \Rightarrow (1+\beta \in \mathsf{313.0}(x, f))$"

...

<u>Beweis **313-13**</u> a) ...

1.4: Aus A1 gleich "$0 \in 313.0(x,f)$",
aus 1.2"$313.0(x,f) \subseteq \mathbb{N}$" und
aus A2 gleich "s" $\forall\beta : (\beta \in 313.0(x,f)) \Rightarrow (1+\beta \in 313.0(x,f))$
folgt via **236-5**: $313.0(x,f) = \mathbb{N}$.

> $\boxed{\text{Thema2}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.
>
> 3: Aus Thema2 und
> aus 1.4"$313.0(x,f) = \mathbb{N}$"
> folgt: $\alpha \in 313.0(x,f)$.
>
> 4: Aus 3"$\alpha \in 313.0(x,f)$"
> folgt via **313-9(Def)**: $x(1+\alpha) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+\alpha])$.

Ergo Thema2: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+\alpha])$.

b)

> $\boxed{\text{Thema1.1}}$ $\gamma \in \mathbb{N}$.
>
> 2.1: Aus Thema1.1"$\gamma \in \mathbb{N}$" und
> aus →)"$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{N}$"
> folgt: $\gamma \in \mathrm{dom}\, f$.
>
> 2.2: Aus Thema1.1"$\gamma \in \mathbb{N}$" und
> aus →)"$\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(0) \setminus \bigcup(f[1+\alpha]))$"
> folgt: $x(1+\gamma) = x(0) \setminus \bigcup f[1+\gamma]$.
>
> 3: Aus Thema1.1"$\gamma \in \mathbb{N}$",
> aus 2.1"$\gamma \in \mathrm{dom}\, f$" und
> aus →)"f Funktion"
> folgt via **313-11**: $f(\gamma) \cap (x(0) \setminus (f[1+\gamma])) = 0$.
>
> 4: Aus 3 und
> aus 2.2
> folgt: $f(\gamma) \cap x(1+\gamma) = 0$.
>
> ...

...

Beweis **313-13** `b)` ...

`Thema1.1` $\gamma \in \mathbb{N}$.

...

`5.1:` Via **KG**$\cap$ xilt: $x(1+\gamma) \cap f(\gamma) = f(\gamma) \cap x(1+\gamma)$.

`5.2:` Aus `Thema1.1` "$\gamma \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1+\gamma \in \mathbb{N}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `4`
folgt: $x(1+\gamma) \cap f(\gamma) = 0$.

`7:` Aus `5.2` "$1+\gamma \in \mathbb{N}$" und
aus `6` "$x(1+\gamma) \cap f(\gamma) = 0$"
folgt via **313-10**: $1+\gamma \in \mathsf{313.1}(x,f,\gamma)$.

`Thema8.1` $1+\gamma \leq \delta \in \mathsf{313.1}(x,f,\gamma)$.

`9.1:` Aus `Thema8.1` "$\delta \in \mathsf{313.1}(x,f,\gamma)$"
folgt via **313-9(Def)**:
$(\delta \in \mathbb{N}) \wedge (x(\delta) \cap f(\gamma) = 0)$.

`9.2:` Aus `Thema1.1` "$\gamma \in \mathbb{N}$"
folgt via **239-5**: $\gamma < 1+\gamma$.

...

...

...

<u>Beweis **313-13**</u> `b)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\gamma \in \mathbb{N}$.

...

$\boxed{\texttt{Thema8.1}}$ $1 + \gamma \leq \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)$.

...

`10.1:` Aus `9.1`“ $\delta \in \mathbb{N} \ldots$ ”
folgt via **159-10**: $1 + \delta \in \mathbb{N}$.

`10.2:` Aus `9.2`“ $\gamma < 1 + \gamma$ ” und
aus `Thema8.1`“ $1 + \gamma \leq \delta$ ”
folgt via **107-8**: $\gamma < \delta$.

`10.3:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$ ” ,
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow (x(1 + \alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$ ” und
aus `9.1`“ $\delta \in \mathbb{N} \ldots$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$x(1 + \delta) = x(0) \setminus \bigcup(f[1 + \delta])$.

`10.4:` Aus `9.1`“ $\delta \in \mathbb{N}$ ”
folgt via **239-5**: $\delta < 1 + \delta$.

`11:` Aus `10.2`“ $\gamma < \delta$ ” und
aus `10.4`“ $\delta < 1 + \delta$ ”
folgt via **107-8**: $\gamma < 1 + \delta$.

`12:` Aus `Thema1.1`“ $\gamma \in \mathbb{N}$ ” ,
aus `10.1`“ $1 + \delta \in \mathbb{N}$ ” ,
aus `11`“ $\gamma < 1 + \delta$ ” ,
aus `2.1`“ $\gamma \in \mathsf{dom}\, f$ ” und
aus →) “ f Funktion ”
folgt via **313-11**:
$f(\gamma) \cap (x(0) \setminus \bigcup(f[1 + \delta])) = 0$.

...

...

...

Beweis **313-13** `b)` ...

`Thema1.1` $\gamma \in \mathbb{N}$.

...

`Thema8.1` $1 + \gamma \le \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)$.

...

`13:` Aus `12` und
aus `10.3`
folgt: $f(\gamma) \cap x(1 + \delta) = 0$.

`14:` Via **KG**$\cap$ xilt: $x(1+\delta) \cap f(\gamma) = f(\gamma) \cap x(1+\delta)$.

`15:` Aus `14` und
aus `13`
folgt: $x(1 + \delta) \cap f(\gamma) = 0$.

`16:` Aus `10.1`"$1 + \delta \in \mathbb{N}$" und
aus `15`"$x(1 + \delta) \cap f(\gamma) = 0$"
folgt via **313-10**: $1 + \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)$.

Ergo `Thema8.1`:

`A1` | "$\forall \delta : (1 + \gamma \le \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)) \Rightarrow (1 + \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma))$"

`8.2:` Via **313-10** xilt: $\mathsf{313.1}(x, f, \gamma) \subseteq \mathbb{N}$.

`9:` Aus `7`"$1 + \gamma \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)$",
aus `8.2`"$\mathsf{313.1}(x, f, \gamma) \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A1`"$\forall \delta : (1 + \gamma \le \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)) \Rightarrow (1 + \delta \in \mathsf{313.1}(x, f, \gamma))$"
folgt via **313-12**: $\{1 + \gamma, \ldots\} \subseteq \mathsf{313.1}(x, f, \gamma)$.

Ergo `Thema1.1`: `A2` | "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\{1 + \gamma, \ldots\} \subseteq \mathsf{313.1}(x, f, \gamma))$"

<u>Beweis **313-13**</u> `b)` ...

`Thema1.2` $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \beta)$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`“$(\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \beta)$”
folgt via **LS**$\mathbb{N}$: $1 + \alpha \leq \beta$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \ldots \in \mathbb{N} \ldots$” und
aus `A2` gleich “$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\{1 + \gamma, \ldots\} \subseteq \mathtt{313.1}(x, f, \gamma))$”
folgt: $\{1 + \alpha, \ldots\} \subseteq \mathtt{313.1}(x, f, \alpha)$.

`3:` Aus `2.1`“$1 + \alpha \leq \beta$” und
aus `Thema1.2`“$\ldots \beta \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **236-1**: $\beta \in \{1 + \alpha, \ldots\}$.

`4:` Aus `3`“$\beta \in \{1 + \alpha, \ldots\}$” und
aus `2.2`“$\{1 + \alpha, \ldots\} \subseteq \mathtt{313.1}(x, f, \alpha)$”
folgt via **0-4**: $\beta \in \mathtt{313.1}(x, f, \alpha)$.

`5:` Aus `4`“$\beta \in \mathtt{313.1}(x, f, \alpha)$”
folgt via **313-9(Def)**: $x(\beta) \cap f(\alpha) = 0$.

`6:` Via **KG**$\cap$ xilt: $f(\alpha) \cap x(\beta) = x(\beta) \cap f(\alpha)$.

`7:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $f(\alpha) \cap x(\beta) = 0$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap x(\beta) = 0)$.

$\square$

313-14. Für disjunktiv wirkende Funktionen mit Definitions-Bereich$\subseteq \mathbb{S}$ kann **313-5** mit Hilfe von $<$ gefälliger formuliert werden.

313-14(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrowtail$) *f Funktion.*

$\rightarrowtail$) $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{S}$.

$\rightarrowtail$) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$.

Dann folgt "f wirkt disjunktiv".

$\leq$-Notation.

Beweis **313-14**

`Thema1.1` $(\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

2: Aus `Thema1.1` "$\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$" und
aus $\rightarrowtail$) "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $\gamma, \delta \in \mathbb{S}$.

3: Aus 2 "$\gamma, \delta \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-14**: $(\gamma < \delta) \vee (\gamma = \delta) \vee (\delta < \gamma)$.

4: Aus 3 und
aus `Thema1` "$\ldots \gamma \neq \delta$"
folgt: $(\gamma < \delta) \vee (\delta < \gamma)$.
`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **313-14** ...

`Thema1.1` $(\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)$.

...

`Fallunterscheidung`

`4.1.Fall` $\gamma < \delta$.

Aus `Thema1.1`“$\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$”,
aus `4.1.Fall`“$\gamma < \delta$” und
aus →)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$”
folgt: $f(\gamma) \cap f(\delta) = 0$.

`4.2.Fall` $\delta < \gamma$.

`5:` Aus `Thema1.1`“$\ldots \delta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$”,
aus `Thema1`“$\gamma \ldots \in \mathsf{dom}\, f \ldots$”,
aus `4.2.Fall`“$\delta < \gamma$” und
aus →)“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$”
folgt: $f(\delta) \cap f(\gamma) = 0$.

`6:` Via **KG**$\cap$ gilt: $f(\gamma) \cap f(\delta) = f(\delta) \cap f(\gamma)$.

`7:` Aus `6` und
aus `5`
folgt: $f(\gamma) \cap f(\delta) = 0$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $f(\gamma) \cap f(\delta) = 0$.

Ergo `Thema1.1`: `A1` “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow (f(\gamma) \cap f(\delta) = 0)$”

`1.2:` Aus →)“f Funktion” und
aus `A1` gleich “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma \neq \delta)) \Rightarrow (f(\gamma) \cap f(\delta) = 0)$”
folgt via **313-5**: f wirkt disjunktiv.

□

313-15. Satz **313-14** wirkt natürlich auch im Spezialfall $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

<u>**313-15(Satz)**</u> *Es gelte:*

→) f *Funktion.*

→) $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

→) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$.

Dann folgt "f wirkt disjunktiv".

<u>$\leq$**-Notation**</u>.

<u>Beweis **313-15**</u>

1: Aus →) "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$" und
aus **159-10** "$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{S}$.

2: Aus →) "f Funktion",
aus 1 "$\mathsf{dom}\, f \subseteq \mathbb{S}$" und
aus →) "$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap f(\beta) = 0)$"
folgt via **313-14**: f wirkt disjunktiv.

□

313-16. Hinter der Folge - der Term wird hier im Kommentar als bekannt angesehen, die Definition ist späterer Zeit vorbehalten - von **312-11(AC)** verbirgt sich eine disjunktiv wirkende Funktion. Diese Erkenntnis soll nun vorbereitet werden.

313-16(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

$\rightarrow$) $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq x(\alpha))$.

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1 + \alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$.

Dann folgt "f wirkt disjunktiv".

RECH-**Notation**.

Beweis **313-16**

$\leq$.-Notation

`1:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$ ”
folgt via **313-13**: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap x(\beta) = 0)$.

`Thema2.1` $(\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma < \delta)$.

`3:` Aus `Thema2.1` “ $\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f \ldots$ ” und
aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$ ”
folgt: $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Aus `3` “ $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$ ” ,
aus `Thema2.1` “ $\ldots \gamma < \delta$ ” und
aus `1` “ $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha < \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \cap x(\beta) = 0)$ ”
folgt: $f(\gamma) \cap x(\delta) = 0$.

`4.2:` Aus `3` “ $\ldots \delta \in \mathbb{N}$ ” und
aus →) “ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq x(\alpha))$ ”
folgt: $f(\delta) \subseteq x(\delta)$.

`5:` Aus `4.2` “ $f(\delta) \subseteq x(\delta)$ ”
folgt via **158-4**: $f(\gamma) \cap f(\delta) \subseteq f(\gamma) \cap x(\delta)$.

`6:` Aus `5` und
aus `4.1`
folgt: $f(\gamma) \cap f(\delta) \subseteq 0$.

`7:` Aus `6` “ $f(\gamma) \cap f(\delta) \subseteq 0$ ”
folgt via **0-18**: $f(\gamma) \cap f(\delta) = 0$.

Ergo `Thema2.1`:

`A1` | “ $\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma < \delta)) \Rightarrow (f(\gamma) \cap f(\delta) = 0)$ ”

`2.2:` Aus →) “ f Funktion ” ,
aus →) “ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$ ” und
aus `A1` gleich “ $\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, f) \wedge (\gamma < \delta)) \Rightarrow (f(\gamma) \cap f(\delta) = 0)$ ”
folgt via **313-15**: f wirkt disjunktiv.

$\square$

313-17. Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von **313-16** noch $0 \neq f(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathsf{dom}\, f$ mit $\alpha \neq p$, so ist f injektiv.

313-17(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ f *Funktion.*

$\rightarrow\!)$ $\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq x(\alpha))$.

$\rightarrow\!)$ $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$.

Dann folgt "f injektiv".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **313-17**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus $\rightarrow\!)$ "$\mathsf{dom}\, f = \mathbb{N}$",
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (f(\alpha) \subseteq x(\alpha))$" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) = x(\alpha) \setminus f(\alpha))$"
folgt via **313-16**: f wirk disjunktiv.

2: Aus $\rightarrow\!)$ "f Funktion",
aus 1 "f wirkt disjunktiv" und
aus $\rightarrow\!)$ "$\forall \alpha : (p \neq \alpha \in \mathsf{dom}\, f) \Rightarrow (0 \neq f(\alpha))$"
folgt via **313-8**: f injektiv.

□

313-18(AC). Ist x eine unendliche Menge, so gibt es eine injektive Funktion $f : \mathbb{N} \to x$.

313-18(AC)(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ *x unendlich.*

$\rightarrow)$ *x Menge.*

Dann gibt es Ω, so dass gilt:

e.1) $\Omega : \mathbb{N} \to x$.

e.2) Ω *injektiv.*

Beweis **313-18(AC)**

1: Aus $\rightarrow)$ "x unendlich" und
aus $\rightarrow)$ "x Menge"
folgt via **312-11(AC)**:
$$\exists \Phi, \Psi : (\Phi : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U}) \wedge (\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x))$$
$$\wedge (\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Phi(\alpha) \in \alpha))$$
$$\wedge (\Psi(0) = x)$$
$$\wedge (\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1 + \alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Phi(\Psi(\alpha))\})).$$

2.1: Aus 1"$\exists \Phi, \Psi \ldots$"
folgt: $\exists \Omega : \Omega = \Phi \circ \Psi$.

2.2: Aus 1"$\ldots \Phi : \mathcal{U} \setminus \{0\} \to \mathcal{U} \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\Phi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \Phi = \mathcal{U} \setminus \{0\})$.

2.3: Aus 1"$\ldots \Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x) \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**:
$$(\Psi \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, \Psi = \mathbb{N}) \wedge (\mathsf{ran}\, \Psi \subseteq \mathcal{P}_{\text{unendl}}(x)).$$

3: Aus 2.2"Φ Funktion…" und
aus 2.3"Ψ Funktion…"
folgt via **18-46**: $\Phi \circ \Psi$ Funktion.

4: Aus 2.1"$\ldots \Omega = \Phi \circ \Psi$" und
aus 3
folgt: Ω Funktion.

…

Beweis **313-18(AC)** ...

$\boxed{\texttt{Thema5.1}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$.

`6.1:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$"
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`6.2:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi$" und
aus `2.3` "$\ldots \mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

`7.1:` Aus `6.1` "α Menge"
folgt via **0-19**: $\alpha \in \mathcal{U}$.

`7.2:` Aus `6.2` "$\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **312-8**: $0 \neq \alpha$.

`8:` Aus `7.2` "$0 \neq \alpha$" und
aus `7.1` "$\alpha \in \mathcal{U}$"
folgt via **5-15**: $\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`9:` Aus `8` "$\alpha \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$" und
aus `2.1` "$\ldots \mathsf{dom}\,\Phi = \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\,\Phi$.

Ergo `Thema5.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,\Psi) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\,\Phi)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathsf{dom}\,\Phi$"

Beweis **313-18(AC)** ...

$\boxed{\texttt{Thema5.2}}$ $\beta \in \mathsf{ran}\,\Omega.$

6: Aus Thema5.2 und
aus 2.1"... $\Omega = \Phi \circ \Psi$"
folgt: $\beta \in \mathsf{ran}\,(\Phi \circ \Psi).$

7: Via **14-6** gilt: $\mathsf{ran}\,(\Phi \circ \Psi) = \Phi[\mathsf{ran}\,\Psi].$

8: Aus 2.2"... $\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **8-9**: $\Phi[\mathsf{ran}\,\Psi] \subseteq \Phi[\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)].$

9: Aus 7 und
aus 8
folgt: $\mathsf{ran}\,(\Phi \circ \Psi) \subseteq \Phi[\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)].$

10: Aus 6"$\beta \in \mathsf{ran}\,(\Phi \circ \Psi)$" und
aus 9"$\mathsf{ran}\,(\Phi \circ \Psi) \subseteq \Phi[\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)]$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \Phi[\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)].$

11: Aus 2.2"Φ Funktion..." und
aus 10"$\beta \in \Phi[\mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)]$"
folgt via **18-28**: $\exists \Gamma : (\Gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)) \wedge (\beta = \Omega(\Gamma)).$

12.1: Aus 11"... $\Gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$ ..."
folgt via **312-2**: $\Gamma \subseteq x.$

12.2: Aus 11"... $\Gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$ ..."
folgt via **312-8**: $0 \neq \Gamma.$

13: Aus 12.2"$0 \neq \Gamma$",
aus 12.1"$\Gamma \subseteq x$" und
aus 1"... $\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Phi(\alpha) \in \alpha)$ ..."
folgt: $\Phi(\Gamma) \in \Gamma.$

14: Aus 11"... $\beta = \Phi(\Gamma)$" und
aus 13
folgt: $\beta \in \Gamma.$

15: Aus 14"$\beta \in \Gamma$" und
aus 12.1"$\Gamma \subseteq x$"
folgt via **0-4**: $\beta \in x.$

...

Beweis **313-18(AC)** ...

Ergo `Thema5.2`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\,\Omega) \Rightarrow (\beta \in x)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} \mathsf{ran}\,\Omega \subseteq x \text{”}}$

`6.1:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{ran}\,\Psi \subseteq \mathsf{dom}\,\Phi$”
folgt via **14-6**: $\mathsf{dom}\,(\Phi \circ \Psi) = \mathsf{dom}\,\Psi$.

`6.2:` Aus **27-14**“$\{.\}$ Funktion” und
aus `4`“Ω Funktion”
folgt via **18-46**: $\{.\} \circ \Omega$ Funktion.

`6.3:` Aus **27-14**“$\mathsf{dom}\,\{.\} = \mathcal{U}$”
folgt via **311-10**: $\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ \Omega) = \mathsf{dom}\,\Omega$.

`7:` Aus `6.1` und
aus `2.3`“$\ldots \mathsf{dom}\,\Psi = \mathbb{N} \ldots$”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\Phi \circ \Psi) = \mathbb{N}$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.1`“$\ldots \Omega = \Phi \circ \Psi$”
folgt: $\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$.

`9.1:` Aus `4`“Ω Funktion”,
aus `8`“$\mathsf{dom}\,\Omega = \mathbb{N}$” und
aus `A2` gleich “$\mathsf{ran}\,\Omega \subseteq x$”
folgt via **21-1(Def)**: $\Omega : \mathbb{N} \to x$.

`9.2:` Aus `8` und
aus `6.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ \Omega) = \mathbb{N}$.

...

Beweis **313-18(AC)** ...

$\boxed{\texttt{Thema10.1}}$ $\beta \in \mathbb{N}$.

`11.1`: Aus `Thema10.1` und
aus `8`
folgt: $\beta \in \mathsf{dom}\, \Omega$.

`11.2`: Aus **27-14**"$\{.\}$ Funktion" und
aus `4`"Ω Funktion"
folgt via **18-46**: $(\{.\} \circ \Omega)(\beta) = \{.\}(\Omega(\beta))$.

`12.1`: Aus `11.1`"$\beta \in \mathsf{dom}\, \Omega$"
folgt via **17-5**: $\Omega(\beta)$ Menge.

`12.2`: Aus `2.1`"$\ldots \Omega = \Phi \circ \Psi$"
folgt: $\Omega(\beta) = (\Phi \circ \Psi)(\beta)$.

`13.1`: Aus `12.1`"$\Omega(\beta)$ Menge"
folgt via **27-14**: $\{.\}(\Omega(\beta)) = \{\Omega(\beta)\}$.

`13.2`: Aus `2.2`"Φ Funktion..." und
aus `2.3`"Ψ Funktion..."
folgt via **18-46**: $(\Phi \circ \Psi)(\beta) = \Phi(\Psi(\beta))$.

`14`: Aus `12.2` und
aus `13.2`
folgt: $\Omega(\beta) = \Phi(\Psi(\beta))$.

`15`: Aus `13.1` und
aus `14`
folgt: $\{.\}(\Omega(\beta)) = \{\Phi(\Psi(\beta))\}$.

`16`: Aus `11.2` und
aus `15`
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\beta) = \{\Phi(\Psi(\beta))\}$.

Ergo `Thema10.1`: `A3` | "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((\{.\} \circ \Omega)(\beta) = \{\Phi(\Psi(\beta))\})$"

...

Beweis **313-18(AC)** ...

`Thema10.2` $\gamma \in \mathbb{N}$.

`Thema11` $\delta \in (\{.\} \circ \Omega)(\gamma)$.

`12:` Aus `Thema10.2`"$\gamma \in \mathbb{N}$" und
aus `A3`"$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow ((\{.\} \circ \Omega)(\beta) = \{\Phi(\Psi(\beta))\})$"
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = \{\Phi(\Psi(\gamma))\}$.

`13:` Aus `Thema11` und
aus `12`
folgt: $\delta \in \{\Phi(\Psi(\gamma))\}$.

`14:` Aus `13`"$\delta \in \{\Phi(\Psi(\gamma))\}$"
folgt via **1-6**: $\delta = \Phi(\Psi(\gamma))$.

`15:` Aus `1`"$\ldots \Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \ldots$" und
aus `Thema10.2`"$\gamma \in \mathbb{N}$"
folgt via **21-4**: $\Psi(\gamma) \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

`16.1:` Aus `15`"$\Psi(\gamma) \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **312-8**: $0 \neq \Psi(\gamma)$.

`16.2:` Aus `15`"$\Psi(\gamma) \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **312-1(Def)**: $\Psi(\gamma) \subseteq x$.

`17:` Aus `16.1`"$0 \neq \Psi(\gamma)$" und
aus `16.2`"$\Psi(\gamma) \subseteq x$" und
aus `1`"$\forall \alpha : (0 \neq \alpha \subseteq x) \Rightarrow (\Phi(\alpha) \in \alpha)$"
folgt: $\Phi(\Psi(\gamma)) \in \Psi(\gamma)$.

`18:` Aus `14` und
aus `17`
folgt: $\delta \in \Psi(\gamma)$.

Ergo `Thema11`: $\forall \delta : (\delta \in (\{.\} \circ \Omega)(\gamma)) \Rightarrow (\delta \in \Psi(\gamma))$.
Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) \subseteq \Psi(\gamma)$.

Ergo `Thema10.2`: `A4` "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((\{.\} \circ \Omega)(\gamma) \subseteq \Psi(\gamma))$"

...

Beweis **313-18(AC)** ...

$\boxed{\texttt{Thema10.3}}$ $\gamma \in \mathbb{N}$.

`11:` Aus `Thema10.3`"$\gamma \in \mathbb{N}$" und
aus `1`"$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\alpha) = \Psi(\alpha) \setminus \{\Phi(\Psi(\alpha))\})$"
folgt: $\Psi(1+\gamma) = \Psi(\gamma) \setminus \{\Phi(\Psi(\gamma))\}$.

`12:` Aus `Thema10.3`"$\gamma \in \mathbb{N}$" und
aus `A3` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow ((\{.\} \circ \Omega)(\beta) = \{\Phi(\Psi(\beta))\})$"
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = \{\Phi(\Psi(\gamma))\}$.

`13:` Aus `11` und
aus `12`
folgt: $\Psi(1+\gamma) = \Psi(\gamma) \setminus (\{.\} \circ \Omega)(\gamma)$.

Ergo `Thema10.3`: $\boxed{\texttt{A5}}$ "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\gamma) = \Psi(\gamma) \setminus (\{.\} \circ \Omega)(\gamma))$"

`10.4:` Es gilt: $(0 \in \mathsf{ran}\,(\{.\} \circ \Omega)) \vee (0 \notin \mathsf{ran}\,(\{.\} \circ \Omega))$.
$\boxed{\texttt{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{10.4.1.Fall}}$ $0 \in \mathsf{ran}\,(\{.\} \circ \Omega)$.

`11:` Aus `10.4.1.Fall`"$0 \in \mathsf{ran}\,(\{.\} \circ \Omega)$" und
aus `6.2`"$\{.\} \circ \Omega$ Funktion"
folgt via **18-24**: $\exists \Upsilon : (\Upsilon \in \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ \Omega)) \wedge ((\{.\} \circ \Omega)(\Upsilon) = 0)$.

`12:` Aus `11`"$\ldots \Upsilon \in \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ \Omega) \ldots$" und
aus `9.2`"$\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ \Omega) = \mathbb{N}$"
folgt: $\Upsilon \in \mathbb{N}$.

`13:` Aus `12`"$\Upsilon \in \mathbb{N}$" und
aus `A3` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((\{.\} \circ \Omega)(\gamma)) = \{\Phi(\Psi(\gamma))\}$"
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\Upsilon) = \{\Phi(\Psi(\Upsilon))\}$.

`14:` Aus `11`"$\ldots (\{.\} \circ \Omega)(\Upsilon) = 0$" und
aus `13`
folgt: $\{\Phi(\Psi(\Upsilon))\} = 0$.

`15:` Aus `14`"$\{\Phi(\Psi(\Upsilon))\} = 0$"
folgt via **1-4**: $\Phi(\Psi(\Upsilon))$ Unmenge.

...

...

...

Beweis **313-18(AC)** ...

`10.4:` Es gilt: $(0 \in \mathsf{ran}(\{.\} \circ \Omega)) \vee (0 \notin \mathsf{ran}(\{.\} \circ \Omega))$.

...

`wfFallunterscheidung`

`10.4.1.Fall` $0 \in \mathsf{ran}(\{.\} \circ \Omega)$.

...

`16:` Aus `15`"$\Phi(\Psi(\Upsilon))$ Unmenge"
folgt via **17-4**: $\Psi(\Upsilon) \notin \mathsf{dom}\,\Phi$.

`17:` Aus `16` und
aus `2.2`"$\ldots \mathsf{dom}\,\Phi = \mathcal{U} \setminus \{0\}$"
folgt: $\Psi(\Upsilon) \notin \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`18:` Aus `12`"$\Upsilon \in \mathbb{N}$" und
aus `1`"$\ldots \Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x) \ldots$"
folgt via **21-4**: $\Psi(\Upsilon) \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$.

`19.1:` Aus `18`"$\Psi(\Upsilon) \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **ElementAxiom**: $\Psi(\Upsilon)$ Menge.

`19.2:` Aus `18`"$\Psi(\Upsilon) \in \mathcal{P}_{\mathrm{unendl}}(x)$"
folgt via **312-8**: $0 \neq \Psi(\Upsilon)$.

`20:` Aus `19.1`"$\Psi(\Upsilon)$ Menge"
folgt via **0-19**: $\Psi(\Upsilon) \in \mathcal{U}$.

`21:` Aus `19.2`"$0 \neq \Psi(\Upsilon)$" und
aus `20`"$\Psi(\Upsilon) \in \mathcal{U}$"
folgt via **5-15**: $\Psi(\Upsilon) \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`22:` Nach `17` gilt: $\Psi(\Upsilon) \notin \mathcal{U} \setminus \{0\}$.

`Ende wfFallunterscheidung`

`A6` | "$0 \notin \mathsf{ran}(\{.\} \circ \Omega)$"

`11:` Aus `6.2`"$\{.\} \circ \Omega$ Funktion",
aus `9.2`"$\mathsf{dom}(\{.\} \circ \Omega) = \mathbb{N}$",
aus `A4` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow ((\{.\} \circ \Omega)(\gamma) \subseteq \Psi(\gamma))$" und
aus `A5` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1 + \gamma) = \Psi(\gamma) \setminus (\{.\} \circ \Omega)(\gamma))$"
folgt via **313-16**: $\{.\} \circ \Omega$ wirkt disjunktiv.

`12:` Aus `6.2`"$\{.\} \circ \Omega$ Funktion",
aus `11`"$\{.\} \circ \Omega$ wirkt disjunktiv" und
aus `A6` gleich "$0 \notin \mathsf{ran}(\{.\} \circ \Omega)$"
folgt via **313-8**: $\{.\} \circ \Omega$ injektiv.

...

Beweis **313-18(AC)** . . .

$\boxed{\texttt{Thema13.1}}$ $(\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, \Omega) \wedge (\Omega(\gamma) = \Omega(\delta))$.

`14.1:` Aus `Thema13.1`“$\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, \Omega \ldots$” und
aus `8`
folgt: $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$.

`14.2:` Aus `Thema13.1`“$\ldots \Omega(\gamma) = \Omega(\delta)$”
folgt: $\{\Omega(\gamma)\} = \{\Omega(\delta)\}$.

`14.3:` Aus `Thema13.1`“$\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, \Omega \ldots$”
folgt via **17-5**: $\Omega(\gamma), \Omega(\delta)$ Menge.

`15.1:` Aus `14.1` und
aus `9.2`
folgt: $\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\, (\{.\} \circ \Omega)$.

`15.2:` Aus `14.3`“$\Omega(\gamma) \ldots$ Menge”
folgt via **27-14**: $\{.\}(\Omega(\gamma)) = \{\Omega(\gamma)\}$.

`15.3:` Aus `14.3`“$\ldots \Omega(\delta)$ Menge”
folgt via **27-14**: $\{.\}(\Omega(\delta)) = \{\Omega(\delta)\}$.

`16.1:` Aus **27-14**“$\{.\}$ Funktion” und
aus `4`“Ω Funktion”
folgt via **18-46**: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = \{.\}(\Omega(\gamma))$.

`16.2:` Aus **27-14**“$\{.\}$ Funktion” und
aus `4`“Ω Funktion”
folgt via **18-46**: $(\{.\} \circ \Omega)(\delta) = \{.\}(\Omega(\delta))$.

`17.1:` Aus `16.1` und
aus `15.2`
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = \{\Omega(\gamma)\}$.

`17.2:` Aus `16.2` und
aus `15.3`
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\delta) = \{\Omega(\delta)\}$.

. . .

. . .

Beweis **313-18(AC)** ...

`Thema13.1` $(\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\,\Omega) \wedge (\Omega(\gamma) = \Omega(\delta))$.

...

`18:` Aus `17.1` und
aus `14.2`
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = \{\Omega(\delta)\}$.

`19:` Aus `18` und
aus `17.2`
folgt: $(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = (\{.\} \circ \Omega)(\delta)$.

`20:` Aus `6.2`“$\{.\} \circ \Omega$ Funktion”,
aus `12`“$\{.\} \circ \Omega$ injektiv”,
aus `15.1`“$\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ \Omega)$” und
aus `18`“$(\{.\} \circ \Omega)(\gamma) = (\{.\} \circ \Omega)(\delta)$”
folgt via **19-2**: $\gamma = \delta$.

Ergo `Thema13.1`: `A7` “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\,\Omega) \wedge (\Omega(\gamma) = \Omega(\delta))) \Rightarrow (\gamma = \delta)$”

`13.2:` Aus `4`“Ω Funktion” und
aus `A7` gleich “$\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathsf{dom}\,\Omega) \wedge (\Omega(\gamma) = \Omega(\delta))) \Rightarrow (\gamma = \delta)$”
folgt via **19-2**: Ω injektiv.

`14:` Aus `2.1`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `9.1`“$\Omega : \mathbb{N} \to x$” und
aus `13.2`“Ω injektiv”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega : \mathbb{N} \to x) \wedge (\Omega \text{ injektiv})$.

$\square$

Analysis: $\mathtt{rf0}q\phi$ und $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}, \overset{<}{\mathsf{sup}}$.

Ersterstellung: 02/10/14 **Letzte Änderung: 07/10/14**

314-1. Ab sofort werden die in einem Satz postulierten Konsequenzen, wenn eine Fallunterscheidung oder die Behandlung eines Themas vorangeht, nicht mehr zusätzlich in einer Box abgehoben dargestellt.

314-1(Satz)

Aus "q Unmenge" folgt "$\mathsf{308.0}(\phi, q) = 0$" und "$\mathtt{rf0}q\phi = 0$".

$\mathsf{308.0}(\phi, q) = \{\omega : (\omega$ *ist* $1 + ., \phi$*-rekursiv mit Startwert* $(0, q))$
$\wedge(\omega$ *Funktion*$) \wedge (\mathsf{dom}\,\omega \in \{\mathbb{N}\} \cup \mathbb{N})\}$ **308-1(Def)**

Beweis **314-1** `VS` gleich q Unmenge.

`1.1:` Es gilt: $(\mathsf{308.0}(\phi, q) = 0) \vee (0 \neq \mathsf{308.0}(\phi, q))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq \mathsf{308.0}(\phi, q)$.

`2:` Aus `1.1.1.Fall` "$0 \neq \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$.

`3:` Aus 2 "$\ldots \Omega \in \mathsf{308.0}(\phi, q)$"
folgt via **308-1(Def)**: Ω ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$.

`4:` Aus 3 "Ω ist $1 + ., \phi$-rekursiv mit Startwert $(0, q)$"
folgt via **306-15**: q Menge.

`5:` Nach `VS` gilt: q Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` `A1` | "$\mathsf{308.0}(\phi, q) = 0$"

`1.2:` $$\mathtt{rf0}q\phi \overset{\mathbf{308-1(Def)}}{=} \bigcup \mathsf{308.0}(\phi, q) \overset{\mathtt{A1}}{=} \bigcup 0 \overset{\mathbf{1-14}}{=} 0.$$

`2:` Aus `1.2`
folgt. $\boxed{\mathtt{rf0}q\phi = 0}$

□

314-2. Gilt $f : D \to B$, so folgt $f : D \to \mathsf{ran}\, f$. Gilt $f : D \to B$ und $\mathsf{ran}\, f = E$, so folgt $f : D \to E$. Falls f eine Funktion ist und falls $p \in \mathsf{dom}\, f$, so folgt $(\{.\} \circ f)(p) = \{f(p)\}$.

314-2(Satz)

a) *Aus* "$f : D \to B$" *folgt* "$f : D \to \mathsf{ran}\, f$".

b) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$\mathsf{ran}\, f = E$" *folgt* "$f : D \to E$".

c) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E)$" *folgt* "$f : D \to E$".

d) *Aus* "f *Funktion*" *und* "$p \in \mathsf{dom}\, f$" *folgt* "$(\{.\} \circ f)(p) = \{f(p)\}$".

Beweis **314-2** a) VS gleich $f : D \to B$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B$" folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

2: Aus 1"f Funktion..." folgt via **21-3**: $f : \mathsf{dom}\, f \to \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2 und aus 1"...$\mathsf{dom}\, f = D$" folgt: $f : D \to \mathsf{ran}\, f$.

b) VS gleich $(f : D \to B) \wedge (\mathsf{ran}\, f = E)$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B$..." folgt via des bereits bewiesenen a): $f : D \to \mathsf{ran}\, f$.

2: Aus 1 und aus VS gleich "...$\mathsf{ran}\, f = E$" folgt: $f : D \to E$.

Beweis **314-2** `c)` `VS` gleich $(f : D \to B) \wedge (\forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E))$.

`Thema1.1` $\beta \in \mathsf{ran}\, f$.

`2:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$" und
aus `Thema1.1`"$\beta \in \mathsf{ran}\, f$"
folgt via **312-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in D) \wedge (\beta = f(\Omega))$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in D \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in D) \Rightarrow (f(\alpha) \in E)$"
folgt: $f(\Omega) \in E$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \beta = f(\Omega)$" und
aus `3`
folgt: $\beta \in E$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathsf{ran}\, f) \Rightarrow (\beta \in E)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran}\, f \subseteq E$"

`1.2:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B \ldots$" und
aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\, f \subseteq E$"
folgt via **312-9**: $f : D \to E$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (p \in \mathsf{dom}\, f)$.

`1.1:` Aus **27-14**"$\{.\}$ Funktion" und
aus `VS` gleich "f Funktion"
folgt via **18-46**: $(\{.\} \circ f)(p) = \{.\}(f(p))$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **17-5**: $f(p)$ Menge.

`2:` Aus `1.2`"$f(p)$ Menge"
folgt via **27-14**: $\{.\}(f(p)) = \{f(p)\}$.

`3:` Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $(\{.\} \circ f)(p) = \{f(p)\}$.

$\square$

314-3. Einer der beiden nicht-konstruktiven Teile von **313-18** wird durch die dort mit Ω bezeichnete "Auswahl-Funktion" verursacht, die jeder nichtleeren Menge eines ihrer Element zuordnet. In bestimmten Situationen kann diese "Auswahl-Funktion" durch eine bekannte Funktion wie $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ ersetzt werden. Dies nachzuweisen und so Aussagen über "Folgen in $\mathbb{S}$" - dieser Begriff wird bald genau gefasst - zu gewinnen verlang einige Vorbereitungen. So kann die etwas mühsame Konstruktiion im Beweis von **313-18** - es musste von Ω zu $\{.\} \circ \Omega$ übergegangen werden - im Hinblick auf den Einsatz von $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}$ umgangen werden. Ich beginne mit einer neuen Betrachtung von $\mathsf{311.0}(x, y, \mathsf{stm})$ im Spezialfall $x = \mathcal{U}$ und $y = \{.\} \circ f$, f Funktion.

314-3(Definition)

$$\mathsf{314.0}(x) = \mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ x, \mathsf{stm})$$

$$= \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in \mathcal{U}) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in \{.\} \circ x) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in \mathsf{stm}))\}$$

$$= \{(\lambda, \mu) : (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in \{.\} \circ x) \wedge (\mu = \lambda \setminus \Omega))\}.$$

$$\mathsf{311.0}(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in y) \wedge (((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\} \quad \textbf{311-1(Def)}$$

314-4. Die Klasse $\mathsf{314.0}(f)$, wobei f eine geeignete Funktion ist, bildet $\mathcal{P}(x)$ in $\mathcal{P}(x)$ so ab, dass aus jeder Teilmenge von x höchstens ein Element von x - nämlich $f(x)$ - entfernt wird.

314-4(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $f : \mathcal{P}(x) \to x$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{314.0}(f) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$.

b) $\forall\alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\mathsf{314.0}(f)(\alpha) = \alpha \setminus \{f(\alpha)\})$.

$\mathsf{314.0}(f) = \{(\lambda, \mu) : (\exists\Omega : ((\lambda, \Omega) \in \{.\} \circ f) \wedge (\mu = \lambda \setminus \Omega))\}$ **314-3(Def)**

Beweis **314-4**

$\mathsf{311.0}(x, y, z) = \{(\lambda, \mu) : (\lambda \in x) \wedge (\exists\Omega : ((\lambda, \Omega) \in y)$
$\wedge(((\lambda, \Omega), \mu) \in z))\}$ **311-1(Def)**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$f : \mathcal{P}(x) \to x$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = \mathcal{P}(x))$.

2: Aus 1 "f Funktion..."
folgt via **311-10**: $(\{.\} \circ f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f) = \mathsf{dom}\, f)$.

3: Aus 2 "$\ldots \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f) = \mathsf{dom}\, f$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{dom}\, f = \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f) = \mathcal{P}(x)$.

4: Aus 2 "$\{.\} \circ f$ Funktion..."
folgt via **311-8**: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm}) : \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f) \to \mathcal{U}$.

5: Aus 4 und
aus 3
folgt: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm}) : \mathcal{U} \cap \mathcal{P}(x) \to \mathcal{U}$.

6: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap \mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(x)$.

...

<u>Beweis</u> **314-4** ...

7: Aus 5 und
aus 6
folgt: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U},\{.\}\circ f,\mathsf{stm})\ :\mathcal{P}(x)\to\mathcal{U}.$

`Thema8.1` $\alpha\in\mathcal{P}(x).$

9: Aus `Thema8.1`"$\alpha\in\mathcal{P}(x)$" und
aus 1"$\ldots\mathsf{dom}\,f=\mathcal{P}(x)$"
folgt: $\alpha\in\mathsf{dom}\,f.$

10: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U}\cap\mathsf{dom}\,f=\mathsf{dom}\,f.$

11: Aus 9 und
aus 10
folgt: $\alpha\in\mathcal{U}\cap\mathsf{dom}\,f.$

12: Aus 11 und
aus 2"$\ldots\mathsf{dom}\,(\{.\}\circ f)=\mathsf{dom}\,f$"
folgt: $\alpha\in\mathcal{U}\cap\mathsf{dom}\,(\{.\}\circ f).$

13: Aus 1"f Funktion..." und
aus `Thema8.1`"$\alpha\in\mathcal{U}\cap\mathsf{dom}\,(\{.\}\circ f)$"
folgt via **311-8**:
$$\mathsf{311.0}(\mathcal{U},\{.\}\circ f,\mathsf{stm})\,(\alpha)=\alpha\setminus(\{.\}\circ f)(\alpha).$$

14: Via **5-5** gilt: $\alpha\setminus(\{.\}\circ f)(\alpha)\subseteq\alpha.$

15: Aus 13 und
aus 14
folgt: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U},\{.\}\circ f,\mathsf{stm})\,(\alpha)\subseteq\alpha.$

16: Aus 15"$\mathsf{311.0}(\mathcal{U},\{.\}\circ f,\mathsf{stm})\,(\alpha)\subseteq\alpha$" und
aus `Thema8.1`"$\alpha\in\mathcal{P}(x)$"
folgt via **0-28**: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U},\{.\}\circ f,\mathsf{stm})\,(\alpha)\in\mathcal{P}(x).$

Ergo `Thema8.1`:

A1	"$\forall\alpha:(\alpha\in\mathcal{P}(x))\Rightarrow(\mathsf{311.0}(\mathcal{U},\{.\}\circ f,\mathsf{stm})\,(\alpha)\in\mathcal{P}(x))$"

...

Beweis **314-4** ...

$\boxed{\texttt{Thema8.2}}$ $\qquad \alpha \in \mathcal{P}(x).$

9: Aus Thema8.2 "$\alpha \in \mathcal{P}(x)$" und
aus 1 "$\ldots \mathsf{dom}\, f = \mathcal{P}(x)$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{dom}\, f.$

10: Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, f = \mathsf{dom}\, f.$

11: Aus 9 und
aus 10
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\, f.$

12: Aus 11 und
aus 2 "$\ldots \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f) = \mathsf{dom}\, f$"
folgt: $\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f).$

13: Aus 2 "$\{.\} \circ f$ Funktion..." und
aus 11 "$\alpha \in \mathcal{U} \cap \mathsf{dom}\,(\{.\} \circ f)$"
folgt via **311-8**:
$$\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus (\{.\} \circ f)(\alpha).$$

14: Aus 1 "f Funktion..." und
aus 9 "$\alpha \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **314-2**: $(\{.\} \circ f)(\alpha) = \{f(\alpha)\}.$

15: Aus 13 und
aus 14
folgt: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus \{f(\alpha)\}.$

Ergo Thema8.2:

A2	"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})\,(\alpha) = \alpha \setminus \{f(\alpha)\})$"

...

<u>Beweis</u> **314-4** . . .

`8.3:` Aus `7`"$\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm}) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{U}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})(\alpha) \in \mathcal{P}(x))$"
folgt via **314-2**: $\mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm}) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$.

`9:` Via **314-3(Def)** gilt: $\mathsf{314.0}(f) = \mathsf{311.0}(\mathcal{U}, \{.\} \circ f, \mathsf{stm})$.

`10.a):` Aus `8.3` und
aus `9`
folgt: $\mathsf{314.0}(f) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$.

`10.b):` Aus `9` und
aus `A2`
folgt: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\mathsf{314.0}(f)(\alpha) = \alpha \setminus \{f(\alpha)\})$.

$\square$

314-5. Auch ein offensichtlich erscheinendes Resultat will vorbereitet sein.

314-5(Definition)

$$\mathtt{314.1}(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}.$$

314-6. Beim "Element-Sein" in `314.1`(x,y) spielt nur die definierende Eingenschaft eine Rolle.

314-6(Satz)

a) *"$p \in = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}$"*
genau dann, wenn "$p \in \mathbb{N}$" und "$x(p) \subseteq x(y)$".

b) $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\} \subseteq \mathbb{N}$

`314.1`$(x,y) = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}$ **314-5(Def)**

Beweis **314-6** a) $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $p \in = \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}$.
Aus `VS`
folgt: $(p \in \mathbb{N}) \wedge (x(p) \subseteq x(y))$.

a) $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(p \in \mathbb{N}) \wedge (x(p) \subseteq x(y))$.

1: Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2: Aus `VS` gleich "$(p \in \mathbb{N}) \wedge (x(p) \subseteq x(y))$" und
aus 1 "p Menge"
folgt: $p \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}$.

b)

`Thema1` $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}$.
Aus `Thema1`
folgt: $\alpha \in \mathbb{N}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{N})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\} \subseteq \mathbb{N}$.
□

314-7. Hier hätte ich gerne meta-mathematische Hilfsmittel zur Verfügung, da ich das Gefühl habe, Ähnliches an späterer Stelle mit analogem Beweis in die Essays einzubringen.

314-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) \subseteq x(\alpha))$.

Dann folgt:

a) $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1+\alpha) \subseteq x(\alpha) \subseteq x(0))$.

b) $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (x(\beta) \subseteq x(\alpha) \subseteq x(0))$.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **314-7**

$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(y))\}$ **314-5(Def)**

...

<u>Beweis **314-7**</u>

`1.1:` Via **0-6** gilt: $x(0) \subseteq x(0)$.

`1.2:` Via **314-6** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\} \subseteq \mathbb{N}$.

`2:` Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$" und
aus `1`"$x(0) \subseteq x(0)$"
folgt via **314-6**: `A1` | "$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$"

> `Thema3.1` $\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$.
>
> `4:` Aus `Thema3.1`"$\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$"
> folgt: $(\beta \in \mathbb{N}) \wedge (x(\beta) \subseteq x(0))$.
>
> `5.1:` Aus `4`"$\beta \in \mathbb{N} \ldots$"
> folgt via **159-10**: $1 + \beta \in \mathbb{N}$.
>
> `5.2:` Aus `4`"$\beta \in \mathbb{N}$" und
> aus →)"$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1 + \alpha) \subseteq x(\alpha))$"
> folgt: $x(1 + \beta) \subseteq x(\beta)$.
>
> `6:` Aus `5.2`"$x(1 + \beta) \subseteq x(\beta)$" und
> aus `4`"$\ldots x(\beta) \subseteq x(0)$"
> folgt via **0-6**: $x(1 + \beta) \subseteq x(0)$.
>
> `7:` Aus `5.1`"$1 + \beta \in \mathbb{N}$" und
> aus `6`"$x(1 + \beta) \subseteq x(0)$"
> folgt via **314-6**: $1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$.

Ergo `Thema3.1`:

`A2` | "$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\})$
$\Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\})$"

`3.2:` Aus `A1` gleich "$0 \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$",
aus `1.2`"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A2`"$\forall \beta : (\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\})$
$\Rightarrow (1 + \beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\})$"
folgt via **236-5**: $\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$.

...

<u>Beweis **314-7**</u> ...

`Thema3.3` $\gamma \in \mathbb{N}$.

`4.1:` Via **0-6** gilt: $x(\gamma) \subseteq x(\gamma)$.

`4.2:` Via **314-6** gilt: $\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\} \subseteq \mathbb{N}$.

`5:` Aus `Thema3.3`"$\gamma \in \mathbb{N}$" und
aus `4`"$x(\gamma) \subseteq x(\gamma)$"
folgt via **314-6**: $\gamma \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}$.

`Thema6.1` $\gamma \leq \delta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}$.

`7:` Aus `Thema6.1`
"$\ldots \delta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}$"
folgt: $(\delta \in \mathbb{N}) \wedge (x(\delta) \subseteq x(\gamma))$.

`8.1:` Aus `7`"$\delta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-10**: $1 + \delta \in \mathbb{N}$.

`8.2:` Aus `7`"$\delta \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus →) "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1 + \alpha) \subseteq x(\alpha))$"
folgt: $x(1 + \delta) \subseteq x(\delta)$.

`9:` Aus `8.2`"$x(1 + \delta) \subseteq x(\delta)$" und
aus `7`"$\ldots x(\delta) \subseteq x(\gamma)$"
folgt via **0-6**: $x(1 + \delta) \subseteq x(\gamma)$.

`10:` Aus `8.1`"$1 + \delta \in \mathbb{N}$" und
aus `9`"$x(1 + \delta) \subseteq x(\gamma)$"
folgt via **314-6**:
$1 + \delta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}$.

...

...

<u>Beweis</u> **<u>314-7</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.3}}$ $\gamma \in \mathbb{N}$.

...

`6.2`: Aus `5`"$\gamma \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}$",
aus `4.2`"$\{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\} \subseteq \mathbb{N}$" und
aus `A3`"$\forall \delta : (\gamma \leq \delta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\})$
$\Rightarrow (1 + \delta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\})$"
folgt via **312-12**:
$$\{\gamma, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}.$$

Ergo `Thema3.3`:

`A4`	"$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\{\gamma, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}))$"

$\boxed{\texttt{Thema4.1}}$ $\gamma \in \mathbb{N}$.

`5`: Aus `Thema4.1` und
aus `3.2`"$\mathbb{N} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$"
folgt via **0-4**: $\gamma \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(0))\}$,

`6`: Aus `5`
folgt: $x(\gamma) \subseteq x(0)$.

Ergo `Thema4.1`:

`A5`	"$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(\gamma) \subseteq x(0))$"

...

Beweis **314-7** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.2}}$ $(\epsilon, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\epsilon \leq \delta)$.

`5.1:` Aus `Thema4.2`"$\epsilon \ldots \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `A4` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow (\{\gamma, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\})$"
folgt: $\{\epsilon, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\epsilon))\}$.

`5.2:` Aus `Thema4.2`"$\ldots \delta \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `Thema4.2`"$\ldots \epsilon \leq \delta$"
folgt via **236-1**: $\delta \in \{\epsilon, \ldots\}$.

`6:` Aus `5.2`"$\delta \in \{\epsilon, \ldots\}$" und
aus `5.1`"$\{\epsilon, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\epsilon))\}$"
folgt via **0-4**: $\delta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\epsilon))\}$.

`7:` Aus `6`
folgt: $x(\delta) \subseteq x(\epsilon)$.

Ergo `Thema4.2`: $\boxed{\texttt{A6} \mid \text{"}\forall \epsilon, \delta : ((\epsilon, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\epsilon \leq \delta)) \Rightarrow (x(\delta) \subseteq x(\epsilon))\text{"}}$

...

Beweis **314-7** ...

`Thema5.1` $\alpha \in \mathbb{N}$.

`6.1:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus `A5` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(\gamma) \subseteq x(0))$"
folgt: $x(\alpha) \subseteq x(0)$.

`6.2:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-10**: $1 + \alpha \in \mathbb{N}$.

`6.3:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in \mathbb{N}$"
folgt via **159-11**: $\alpha \in \mathbb{S}$.

`7:` Aus `6.3` "$\alpha \in \mathbb{S}$"
folgt via **160-12**: $\alpha \leq 1 + \alpha$.

`8:` Aus `Thema5.1` "$\alpha \in \mathbb{N}$",
aus `6.2` "$1 + \alpha \in \mathbb{N}$",
aus `7` "$\alpha \leq 1 + \alpha$" und
aus `A6` gleich "$\forall \epsilon, \delta : ((\epsilon, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\epsilon \leq \delta))$
$\Rightarrow (x(\epsilon) \subseteq x(\delta))$"
folgt: $x(1 + \alpha) \subseteq x(\alpha)$.

`9:` Aus `8` "$x(1 + \alpha) \subseteq x(\alpha)$" und
aus `6.1` "$x(\alpha) \subseteq x(0)$"
folgt via **0-6**: $x(1 + \alpha) \subseteq x(\alpha) \subseteq x(0)$.

Ergo `Thema5.1`: `Aa)` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(1 + \alpha) \subseteq x(\alpha) \subseteq x(0))$"

...

<u>Beweis **314-7**</u> . . .

`Thema5.2` $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)$.

`6.1:` Aus `Thema5.2`"$\alpha \ldots \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `A5` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (x(\gamma) \subseteq x(0))$"
folgt: $x(\alpha) \subseteq x(0)$.

`6.2:` Aus `Thema5.2`"$\ldots \alpha \leq \beta$" und
aus `Thema5.2`"$\ldots \beta \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **236-1**: $\beta \in \{\alpha, \ldots\}$.

`7:` Aus `Thema5.2`"$\alpha \ldots \in \mathbb{N} \ldots$" und
aus `A4` gleich "$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow (\{\gamma, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\gamma))\}))$"
folgt: $\{\alpha, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\alpha))\}))$.

`8:` Aus `6.2`"$\beta \in \{\alpha, \ldots\}$" und
aus `7`"$\{\alpha, \ldots\} \subseteq \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\alpha))\}))$"
folgt via **0-4**: $\beta \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{N}) \wedge (x(\omega) \subseteq x(\alpha))\}))$.

`9:` Aus `8`
folgt: $x(\beta) \subseteq x(\alpha)$.

`10:` Aus `9` und
aus `6.1`
folgt: $x(\beta) \subseteq x(\alpha) \subseteq x(0)$.

Ergo `Thema5.2`:

`Ab)`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (x(\beta) \subseteq x(\alpha) \subseteq x(0))$"

$\square$

314-8. Nun kann via **314-4** für Funktionen $f : \mathcal{P}(x) \to x$ - x kann hier auch eine Unmenge sein - und für $q \subseteq x$, q Menge, die Existenz einer Funktion $\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x)$ mit $\Omega(1{+}n) = \Omega(n) \setminus \{f(x)\}$ und $\Omega(0) = q$ *ohne Einsatz des AuswahlAxioms* gesichert werden. Die Eigenschaften von Ω werden hier im laufenden Beweis entsprechend ihrer Codierung angeführt. Es wird darauf verzichtet, diese Eigenschaften - wie bisher üblich - am Ende des Beweises noch einmal aufzulisten. In ähnlichen Fällen wird in Zukunft analog verfahren. Die Beweis-Reihenfolge ist `e.06)` - `e.1)` - `e.2)` - `e.3)` - `e.4)` - `e.5)` - `e.7)` - `e.9)` - `e.8)`.

314-8(Satz) *Es gelte:*

$\to)$ $q \subseteq x$.

$\to)$ q *Menge.*

$\to)$ $f : \mathcal{P}(x) \to x$.

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

`e.0)` $\Omega = \mathtt{rf}0q\overbrace{\mathsf{314.0}(f)}$.

`e.1)` $\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x)$.

`e.2)` $\Omega(0) = q$.

`e.3)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{f(\Omega(\alpha))\})$.

`e.4)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

`e.5)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

`e.6)` $\Psi = f \circ \Omega$.

`e.7)` $\Psi : \mathbb{N} \to x$.

`e.8)` $\Psi(0) = f(q)$.

`e.9)` $\Psi(p) = f(\Omega(p))$.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

$\mathsf{314.0}(f) = \{(\lambda, \mu) : (\exists \Omega : ((\lambda, \Omega) \in \{.\} \circ f) \wedge (\mu = \lambda \setminus \Omega))\}$ **314-3(Def)**

<u>Beweis **314-8**</u>

`1.1:` Aus →) " $q \subseteq x$ " und
aus →) " q Menge "
folgt via **0-26**: $$q \in \mathcal{P}(x).$$

`1.e.06):` Aus →) " $f : \mathcal{P}(x) \to x$ " und
aus →) " $q \subseteq x$ "
folgt: $$\exists \Omega, \Psi : (\Omega = \mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)}) \wedge (\Psi = f \circ \Omega).$$

`1.2:` Aus →) " $f : \mathcal{P}(x) \to x$ "
folgt via **314-4**: $$\mathtt{314.0}(f) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x).$$

`1.3:` Aus →) " $f : \mathcal{P}(x) \to x$ "
folgt via **314-4**: $$\forall \beta : (\beta \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\mathtt{314.0}(f)(\beta) = \beta \setminus \{f(\beta)\}).$$

`2.1:` Aus `1.2` " $\mathtt{314.0}(f) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ " und
aus `1.1` " $q \in \mathcal{P}(x)$ "
folgt via **308-15**: $$\mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)} : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x).$$

`2.2:` Aus `1.2` " $\mathtt{314.0}(f) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ " und
aus `1.1` " $q \in \mathcal{P}(x)$ "
folgt via **308-15**: $$\mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)}(0) = q.$$

`2.3:` Aus `1.2` " $\mathtt{314.0}(f) : \mathcal{P}(x) \to \mathcal{P}(x)$ " und
aus `1.1` " $q \in \mathcal{P}(x)$ "
folgt via **308-15**:
$$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)}(1+\gamma) = \mathtt{314.0}(f)(\mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)}(\gamma))).$$

`3.e.1):` Aus `1.e.06)` " $\ldots \Omega = \mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)} \ldots$ " und
aus `2.1`
folgt: $$\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x).$$

`3.e.2):` Aus `1.e.06)` " $\ldots \Omega = \mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)} \ldots$ " und
aus `2.2`
folgt: $$\Omega(0) = q.$$

`3.2:` Aus `1.2` " $\ldots \Omega = \mathtt{rf0}q\overbrace{\mathtt{314.0}(f)} \ldots$ " und
aus `2.3`
folgt: $$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\gamma) = \mathtt{314.0}(f)(\Omega(\alpha))).$$

`4.1:` Aus →) " $f : \mathcal{P}(x) \to x$ " und
aus `3.e.1)` " $\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x)$ "
folgt via **21-10**: $$f \circ \Omega : \mathbb{N} \to x.$$

...

Beweis **314-8** ...

$\boxed{\texttt{Thema4.2}}$ $\alpha \in \mathbb{N}$.

5: Aus 3.1"$\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x)$" und
aus Thema4.2"$\alpha \in \mathbb{N}$" und
folgt via **21-4**: $\Omega(\alpha) \in \mathcal{P}(x)$.

6: Aus 5"$\Omega(\alpha) \in \mathcal{P}(x)$" und
aus 1.3"$\forall \beta : (\beta \in \mathcal{P}(x)) \Rightarrow (\mathtt{314.0}(f)\,(\beta) = \beta \setminus \{f(\beta)\})$"
folgt: $\mathtt{314.0}(f)\,(\Omega(\alpha)) = \Omega(\alpha) \setminus \{f(\Omega(\alpha))\}$.

7: Aus Thema4.2"$\alpha \in \mathbb{N}$" und
aus 3.2"$\forall \gamma : (\gamma \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\gamma) = \mathtt{314.0}(f)\,(\Omega(\gamma)))$"
folgt: $\Omega(1+\alpha) = \mathtt{314.0}(f)\,(\Omega(\alpha))$.

8: Aus 6 und
aus 7
folgt: $\Omega(1+\alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{f(\Omega(\alpha))\}$.

Ergo Thema4.2: | Ae.3) | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{f(\Omega(\alpha))\})$" |

$\boxed{\texttt{Thema4.3}}$ $\delta \in \mathbb{N}$.

5: Aus Thema4.3"$\delta \in \mathbb{N}$" und
aus Ae.3) gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow (\Omega(1+\alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{f(\Omega(\alpha))\})$"
folgt: $\Omega(1+\delta) = \Omega(\delta) \setminus \{f(\Omega(\delta))\}$.

6: Via **5-5** gilt: $\Omega(\delta) \setminus \{f(\Omega(\delta))\} \subseteq \Omega(\delta)$.

7: Aus 5 und
aus 6
folgt: $\Omega(1+\delta) \subseteq \Omega(\delta)$.

Ergo Thema4.3: | A2 | "$\forall \delta : (\delta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\delta) \subseteq \Omega(\delta))$" |

...

Beweis **314-8** ...

4.3: Aus A2 gleich "$\forall\delta : (\delta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\delta) \subseteq \Omega(\delta))$"
folgt via **314-7**: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq \Omega(0))$.

4.4: Aus A2 gleich "$\forall\delta : (\delta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\delta) \subseteq \Omega(\delta))$"
folgt via **314-7**: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq \Omega(0))$.

5.e.4): Aus 3.2.e) und
aus 4.3
folgt: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

5.e.5): Aus 3.2.e) und
aus 4.4
folgt: $\forall\alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

5.e.7): Aus 1.e.06)"$\ldots \Psi = f \circ \Omega$" und
aus 4.1
folgt: $\Psi : \mathbb{N} \to x$.

6.1: Aus →)"$f : \mathcal{P}(x) \to x$"
folgt via **21-1(Def)**: f Funktion.

6.2: Aus 3.e.1)"$\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(x)$"
folgt via **21-1(Def)**: Ω Funktion.

7: Aus 6.1"f Funktion" und
aus 6.2"Ω Funktion"
folgt via **18-46**: $(f \circ \Omega)(p) = f(\Omega(p))$.

8.e.9): Aus 7 und
aus 1.e.06)"$\ldots \Psi = f \circ \Omega$"
folgt: $\Psi(p) = f(\Omega(p))$.

9: $\Psi(0) \stackrel{\text{8.e.9)}}{=} f(\Omega(0)) \stackrel{\text{3.e.2)}}{=} f(q)$.

10.e.8): Aus 9
folgt: $\Psi(0) = f(q)$.

□

314-9. Beim Übergang zu TeilMengen von $\mathbb{S}$ vergrößert sich das $\leq$ _Infimum, das $\leq$ _Supremum verringert sich.

314-9(Satz)

a) *Aus* "$x \subseteq y \subseteq \mathbb{S}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, y \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$".

b) *Aus* "$x \subseteq y \subseteq \mathbb{S}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \leq \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, y$".

$\leq$-Notation.

Beweis **314-9** a) VS gleich $x \subseteq y \subseteq \mathbb{S}$.

1.1: Aus VS gleich "$x \subseteq y \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots y \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, y$ ist $\leq$ _Infimum von y.

2.1: Aus 1.1 "$x \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ _Infimum von x.

2.2: Aus 1.2 "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, y$ ist $\leq$ _Infimum von y" und
aus VS gleich "$x \subseteq y \ldots$"
folgt via **36-5**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, y$ untere $\leq$ _Schranke von x.

3: Aus 2.1 "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$ ist $\leq$ _Infimum von x" und
aus 2.2 "$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, y$ untere $\leq$ _Schranke von x"
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, y \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, x$.

<u>Beweis **314-9**</u> `b)` `VS` gleich $x \subseteq y \subseteq \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x \subseteq y \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **0-6**: $x \subseteq \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, y$ ist $\leq$ -Supremum von y.

`2.1:` Aus `1.1`“$x \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ -Supremum von x.

`2.2:` Aus `1.2`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, y$ ist $\leq$ -Supremum von y” und
aus `VS` gleich “$x \subseteq y \ldots$”
folgt via **36-5**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, y$ obere $\leq$ -Schranke von x.

`3:` Aus `2.1`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x$ ist $\leq$ -Supremum von x” und
aus `2.2`“$\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, y$ obere $\leq$ -Schranke von x”
folgt via **36-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, x \leq \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, y$.

□

314-10. Mit **314-8** ist der Grundstein zum Beweis des angestrebten Satzes dieses Essays gelegt. Die Beweis-Reihenfolge ist `e.0612345789) - e.10) - e.11)`.

314-10(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $q \subseteq \mathbb{S}$.

Dann gibt es Ω, Ψ*, so dass gilt:*

`e.0)` $\Omega = \mathtt{rf0}q\,\overbrace{314.0(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})}$.

`e.1)` $\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`e.2)` $\Omega(0) = q$.

`e.3)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\Omega(\alpha))\})$.

`e.4)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

`e.5)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

`e.6)` $\Psi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}} \circ \Omega$.

`e.7)` $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$.

`e.8)` $\Psi(0) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q$.

`e.9)` $\Psi(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\,(\Omega(p))$.

`e.10)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\alpha) \leq \Psi(1+\alpha))$.

`e.11)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\alpha) \leq \Psi(\beta))$.

$\leq$`.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **314-10**</u>

`1.1:` Aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **95-9**"$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: q Menge.

`1.2:` Via **190-1** gilt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$.

`2.e.0612345789):` Aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$",
aus `1.1`"q Menge" und
aus `1.2`"$\overset{\leq}{\mathsf{inf}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$"

folgt via **314-8**:
$$\exists \Omega, \Psi : \Omega = \mathtt{rf0}q\,\overbrace{\mathsf{314.0}(\overset{\leq}{\mathsf{inf}})}$$
$$\wedge \quad \Psi = \overset{\leq}{\mathsf{inf}} \circ \Omega$$
$$\wedge \quad \Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{S})$$
$$\wedge \quad \Omega(0) = q$$
$$\wedge \quad \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{\ \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\ (\Omega(\alpha))\}$$
$$\wedge \quad \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$$
$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$$
$$\wedge \quad \Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$$
$$\wedge \quad \Psi(0) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\ q$$
$$\wedge \quad \Psi(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\ (\Omega(p)).$$

...

<u>Beweis</u> **<u>314-10</u>** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\beta \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `Thema3.1`"$\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `2.e.0612345789)`"$\ldots \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q) \ldots$"
folgt: $\Omega(1+\beta) \subseteq \Omega(\beta) \subseteq q$.

`5.1:` Aus 4"$\ldots \Omega(\beta) \subseteq q$" und
aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\Omega(\beta) \subseteq \mathbb{S}$.

`5.2:` Aus 4"$\ldots \Omega(\beta) \subseteq q$" und
aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **314-9**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\beta))$.

`6:` Aus 4"$\Omega(1+\beta) \subseteq \Omega(\beta) \ldots$" und
aus `5.1`"$\Omega(\beta) \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **314-9**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\beta)) \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(1+\beta))$.

`7:` Aus `5.2` und
aus `6`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\beta)) \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(1+\beta))$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.e.0612345789)`"$\ldots \Psi(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(p))$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\beta) \leq \Psi(1+\beta)$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\beta) \leq \Psi(1+\beta))$.

Konsequenz: $\boxed{\texttt{A3.1.e.10)} \;\Big|\; \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\alpha) \leq \Psi(1+\alpha))\text{”}}$

Beweis **314-10** ...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $(\gamma, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \leq \delta)$.

`4:` Aus `Thema3.2`“$(\gamma, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \leq \delta)$” und
aus `2.e.0612345789)`“$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q) \ldots$”
folgt: $\Omega(\delta) \subseteq \Omega(\gamma) \subseteq q$.

`5.1:` Aus `4`“$\ldots \Omega(\gamma) \subseteq q$” und
aus $\rightarrow$)“$q \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **0-6**: $\Omega(\gamma) \subseteq \mathbb{S}$.

`5.2:` Aus `4`“$\ldots \Omega(\gamma) \subseteq q$” und
aus $\rightarrow$)“$q \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **314-9**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\gamma))$.

`6:` Aus `4`“$\Omega(\delta) \subseteq \Omega(\gamma) \ldots$” und
aus `5.1`“$\Omega(\gamma) \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **314-9**: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\gamma)) \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\delta))$.

`7:` Aus `5.2` und
aus `6`
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\gamma)) \leq \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(\delta))$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.e.0612345789)`“$\ldots \Psi(p) = \overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, (\Omega(p))$”
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\gamma) \leq \Psi(\delta)$.

Ergo `Thema3.2`: $\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \leq \delta)) \Rightarrow (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\gamma) \leq \Psi(\delta))$.

Konsequenz:

`A3.2.e.11)`	“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\overset{\leq}{\mathsf{inf}}\, q \leq \Psi(\alpha) \leq \Psi(\beta))$”

□

314-11. Der Vollständigkeit halber sei auch noch die "$\overset{\le}{\mathsf{sup}}$-Version" von **314-10** angeführt. Die Beweis-Reihenfolge ist `e.0612345789) - e.10) - e.11)`.

<u>**314-11(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow)$ $q \subseteq \mathbb{S}$.

Dann gibt es Ω, Ψ, *so dass gilt:*

`e.0)` $\Omega = \mathtt{rf0}q\,\overbrace{\mathsf{314.0}(\overset{\le}{\mathsf{sup}})}$.

`e.1)` $\Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{S})$.

`e.2)` $\Omega(0) = q$.

`e.3)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{\overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(\alpha))\})$.

`e.4)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1 + \alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

`e.5)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \le \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$.

`e.6)` $\Psi = \overset{\le}{\mathsf{sup}} \circ \Omega$.

`e.7)` $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$.

`e.8)` $\Psi(0) = \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, q$.

`e.9)` $\Psi(p) = \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(p))$.

`e.10)` $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1 + \alpha) \le \Psi(\alpha) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, q)$.

`e.11)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \le \beta)) \Rightarrow (\Psi(\beta) \le \Psi(\alpha) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\, q)$.

<u>$\le$`.RECH`-**Notation**</u>.

Beweis **314-11**

`1.1:` Aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$" und
aus **95-9** "$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **TeilMengenAxiom**: q Menge.

`1.2:` Via **190-1** gilt: $\overset{<}{\mathsf{sup}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$.

`2.e.0612345789):` Aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$",
aus `1.1` "q Menge" und
aus `1.2` "$\overset{<}{\mathsf{sup}}: \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}$"

folgt via **314-8**: fr$\exists \Omega, \Psi : \Omega = \mathtt{rf}0q\,\overbrace{\mathsf{314.0}(\overset{<}{\mathsf{sup}})}$

$$\wedge \quad \Psi = \overset{<}{\mathsf{sup}} \circ \Omega$$
$$\wedge \quad \Omega : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{S})$$
$$\wedge \quad \Omega(0) = q$$
$$\wedge \quad \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) = \Omega(\alpha) \setminus \{\, \overset{<}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(\alpha))\}$$
$$\wedge \quad \forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$$
$$\wedge \quad \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$$
$$\wedge \quad \Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$$
$$\wedge \quad \Psi(0) = \overset{<}{\mathsf{sup}}\, q$$
$$\wedge \quad \Psi(p) = \overset{<}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(p)).$$

...

Beweis **314-11** . . .

$\boxed{\texttt{Thema3.1}}$ $\beta \in \mathbb{N}$.

`4:` Aus `Thema3.1` "$\beta \in \mathbb{N}$" und
aus `2.e.0612345789)` "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Omega(1+\alpha) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q)$"
folgt: $\Omega(1+\beta) \subseteq \Omega(\beta) \subseteq q$.

`5.1:` Aus 4 "$\ldots \Omega(\beta) \subseteq q$" und
aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\Omega(\beta) \subseteq \mathbb{S}$.

`5.2:` Aus 4 "$\ldots \Omega(\beta) \subseteq q$" und
aus →) "$q \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **314-9**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(\beta)) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,q$.

`6:` Aus 4 "$\Omega(1+\beta) \subseteq \Omega(\beta) \ldots$" und
aus `5.1` "$\Omega(\beta) \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **314-9**: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(1+\beta)) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(\beta))$.

`7:` Aus `5.2` und
aus `6`
folgt: $\overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(1+\beta)) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(\beta)) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,q$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.e.0612345789)` "$\ldots \Psi(p) = \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,(\Omega(p))$"
folgt: $\Psi(1+\beta) \le \Psi(\beta) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,q$.

Ergo `Thema3.1`: $\forall \beta : (\beta \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\beta) \le \Psi(\beta) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,q)$.

Konsequenz: $\boxed{\texttt{A3.1.e.10)}\ \Big|\ \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{N}) \Rightarrow (\Psi(1+\alpha) \le \Psi(\alpha) \le \overset{\le}{\mathsf{sup}}\,q)\text{”}}$

<u>Beweis **314-11**</u> ...

$\boxed{\texttt{Thema3.2}}$ $(\gamma, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \leq \delta)$.

`4:` Aus `Thema3.2`“$(\gamma, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \leq \delta)$” und
aus `2.e.0612345789)`“$\ldots \forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta))$
$\Rightarrow (\Omega(\beta) \subseteq \Omega(\alpha) \subseteq q) \ldots$”
folgt: $\Omega(\delta) \subseteq \Omega(\gamma) \subseteq q$.

`5.1:` Aus `4`“$\ldots \Omega(\gamma) \subseteq q$” und
aus →)“$q \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **0-6**: $\Omega(\gamma) \subseteq \mathbb{S}$.

`5.2:` Aus `4`“$\ldots \Omega(\gamma) \subseteq q$” und
aus →)“$q \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **314-9**: $\overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,(\Omega(\gamma)) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,q$.

`6:` Aus `4`“$\Omega(\delta) \subseteq \Omega(\gamma) \ldots$” und
aus `5.1`“$\Omega(\gamma) \subseteq \mathbb{S}$”
folgt via **314-9**: $\overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,(\Omega(\delta)) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,(\Omega(\gamma))$.

`7:` Aus `5.2` und
aus `6`
folgt: $\overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,(\Omega(\delta)) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,(\Omega(\gamma)) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,q$.

`8:` Aus `7` und
aus `2.e.0612345789)`“$\ldots \Psi(p) = \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,(\Omega(p))$”
folgt: $\Psi(\delta) \leq \Psi(\gamma) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,q$

Ergo `Thema3.2`: $\forall \gamma, \delta : ((\gamma, \delta \in \mathbb{N}) \wedge (\gamma \leq \delta)) \Rightarrow (\Psi(\delta) \leq \Psi(\gamma) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,q)$.

Konsequenz:

`A3.2.e.11)`	“$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in \mathbb{N}) \wedge (\alpha \leq \beta)) \Rightarrow (\Psi(\beta) \leq \Psi(\alpha) \leq \overset{<}{\overline{\mathsf{sup}}}\,q)$”

□

Analysis: $\mathcal{U}_x$**Axiom**. $\uparrow x$. $\uparrow$**Axiom**.
<u>`RECH`-**Notation**</u>, Fortsetzung: $y \uparrow x = (\uparrow x)(y)$.

Ersterstellung: 08/10/14 **Letzte Änderung: 09/10/14**

$\mathcal{U}_x$**Axiom** Fortschritte der Erkenntnis kommen gelegentlich spät. Im vorliegenden Fall nicht bei der Erstellung und Überarbeitung von **#240**, sondern erst jetzt, 75 Essays später. Bei der rekursiven Definition von $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, war mir aus zweierlei Gründen nicht ganz wohl. Erstens weil der Term "$\mathcal{U}_x$" nur für $x \in \mathbb{N}$ defniert worden war. Zweitens weil gelegentlich die allgemeine Ersetzungsregel auf den "Index" x von $\mathcal{U}_x$ angewendet wurde. Nun sehe ich eine Möglichkeit, beide Probleme durch ein Axiom zu beheben. Es wird postuliert, dass $\mathcal{U}_x$ stets eine Klasse ist und dass die allgemeine Ersetzungsregel für den Index x von $\mathcal{U}_x$ gilt. Dabei ist es bis auf Weiteres gar nicht nötig, $\mathcal{U}_x$ für $x \notin \mathbb{N}$ zu definieren. Dies kann bei Gelegenheit und bei Bedarf später geschehen. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt habe ich keine Ahnung, wie eine derartige Definition aussehen könnte. Der Einsatz des $\mathcal{U}_x$**Axiom**s erfolgt ohne Zitat.

<u>$\mathcal{U}_x$**Axiom**</u>

1) $\exists \Omega : \Omega = \mathcal{U}_x$.

2) Aus "$x = y$" folgt "$\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$".

315-1. Es werden die klassischen Potenzfunktionen mit Definitions-Bereich $\mathbb{A}$ mittels rekursiver Parameter-Definition in die Essays eingebracht.

315-1(Rekursive Parameter-Definition)

a) $\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$.

b) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\uparrow (1 + n) = (\uparrow n) \;.\cdot.\; \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$".

c) *Aus* "$n \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\uparrow (-(1 + n)) = (\uparrow (-n)).:.\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$".

$\uparrow$**Axiom** Wie beim $\mathcal{U}_x$**Axiom** soll es im Umgang mit $\uparrow x$ für allgemeine Klassen x zu keinen Unebenheiten kommen. Im Speziellen muss zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht gesagt werden, was genau unter $\uparrow x$ für $x \notin \mathbb{Z}$ zu verstehen ist. Der Einsatz des $\uparrow$**Axiom**s erfolgt zumeist ohne Zitat.

$\uparrow$**Axiom**

1) $\exists \Omega : \Omega = \uparrow x$.

2) Aus "$x = y$" folgt "$\uparrow x = \uparrow y$" .

`RECH`-**Notation. Fortsetzung.** In Weiterführung der **`RECH`-Notation** wird der notationelle Umgang mit $(\uparrow y)(x)$ geregelt.

`RECH`-Notation (Fortsetzung)

0) $x \uparrow y = (\uparrow y)(x)$.

1) $-x \uparrow y = -(x \uparrow y)$.

2) $z \pm x \uparrow y = z \pm (x \uparrow y)$.

3) $x \uparrow y \pm z = (x \uparrow y) \pm z$.

4) $z \cdot x \uparrow y = z \cdot (x \uparrow y)$.

5) $x \uparrow y \cdot z = (x \uparrow y) \cdot z$.

6) $z : x \uparrow y = z : (x \uparrow y)$.

7) $x \uparrow y : z = (x \uparrow y) : z$.

315-2. Ergänzend zu **213-2** und vorbereitend für **315-3** wird hier $\{x\} \subseteq y$ thematisiert.

315-2(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\{x\} \subseteq y$.

`ii)` *"$x \in y$" oder "x Unmenge".*

<u>Beweis **315-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $\{x\} \subseteq y$.

`1:` Es gilt: $(x \text{ Menge}) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Menge.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Menge" folgt via **1-3**: $x \in \{x\}$.

`3:` Aus 2 "$x \in \{x\}$" und aus `VS` gleich "$\{x\} \subseteq y$" folgt via **0-4**: $x \in y$.

`1.2.Fall` x Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \in y) \vee (x \text{ Unmenge})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \in y) \vee (x \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x \in y$.

Aus `0.1.Fall` "$x \in y$" folgt via **1-8**: $\{x\} \subseteq y$.

`0.2.Fall` x Unmenge.

`1:` Aus `0.2.Fall` "x Unmenge" folgt via **1-4**: $\{x\} = 0$.

`2:` Via **0-18** gilt: $0 \subseteq y$.

`3:` Aus `1` und aus `2` folgt: $\{x\} \subseteq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{x\} \subseteq y$.

$\square$

315-3. Ergänzend zu **95-4(Def)** "$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x$ Zahl)" wird hier "$((x$ Zahl$) \vee (x$ Unmenge$)) \Leftrightarrow (\{x\} \subseteq \mathbb{A})$" fest gehalten.

315-3(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"x Zahl" oder "x Unmenge".*

`ii)` $\{x\} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **315-3** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $(x$ Zahl$) \vee (x$ Unmenge$)$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `0.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`3:` Aus 2 "$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **1-8**: $\{x\} \subseteq \mathbb{A}$.

`0.2.Fall` x Unmenge.

Aus `0.2.Fall` "x Unmenge"
folgt via **315-2**: $\{x\} \subseteq \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\{x\} \subseteq \mathbb{A}$.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $\{x\} \subseteq \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\{x\} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **315-2**: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x$ Unmenge$)$.

`2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x$ Zahl$)$.

`3:` Aus 1 und
aus 2
folgt: $(x$ Zahl$) \vee (x$ Unmenge$)$.

□

315-4. Dass hier $1 \neq \mathcal{U}$ gebraucht wird hätte ich mir nicht gedacht.

315-4(Satz)

$$1 \neq \mathcal{U}.$$

Beweis **315-4**
Aus $\in$**schola**“1 Menge”
folgt via **0-17**: $1 \neq \mathcal{U}$.

□

315-5. Die Klasse $\uparrow 0$ ist am schnellsten zu diskutieren.

315-5(Satz)

a) $\uparrow 0$ *Menge.*

b) $\uparrow 0$ *Relation.*

c) $\uparrow 0$ *Funktion.*

d) $\mathsf{dom}\,(\uparrow 0) = \mathbb{A}$.

e) $\mathsf{ran}\,(\uparrow 0) = \{1\}$.

f) $\uparrow 0 : \mathbb{A} \to \{1\}$.

g) $\uparrow 0 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

h) *"x Zahl" genau dann, wenn "$x \uparrow 0 = 1$".*

i) *"$x \notin \mathbb{A}$" genau dann, wenn "$x \uparrow 0 = \mathcal{U}$".*

j) *"$x \uparrow 0 = 1$" oder "$x \uparrow 0 = \mathcal{U}$".*

RECH-**Notation**.

Beweis **315-5** abcdefg)

1.1: Aus **AAI**"$\mathbb{A}$ Menge"
folgt via **214-5**: $1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$ Menge.

1.2: Via **214-4** gilt: $1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$ Funktion.

1.3: Aus $\in$**schola**"1 Menge"
folgt via **214-3**: $\mathsf{dom}\,(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) = \mathbb{A}$.

1.4: Aus **95-7**"$0 \neq \mathbb{A}$"
folgt via **214-3**: $\mathsf{ran}\,(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) = \{1\}$.

1.5: Aus $\in$**schola**"1 Menge"
folgt via **214-4**: $1^{\mathbf{on}}\mathbb{A} : \mathbb{A} \to \{1\}$.

1.6: Aus $\in$**schola**"1 Zahl"
folgt via **315-3**: $\{1\} \subseteq \mathbb{A}$.

...

<u>Beweis **315-5**</u> `abcdefg)` ...

`2.1:` Aus `1.2` "$1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$ Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: $1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$ Relation.

`2.2:` Aus `1.5` "$1^{\mathbf{on}}\mathbb{A} : \mathbb{A} \to \{1\}$" und
aus `1.6` "$\{1\} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **21-5**: $\uparrow 0 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`3.a):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `1.1`
folgt: $\uparrow 0$ Menge.

`3.b):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `2.1`
folgt: $\uparrow 0$ Relation.

`3.c):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `1.2`
folgt: $\uparrow 0$ Funktion.

`3.d):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `1.3`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 0) = \mathbb{A}$.

`3.e):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `1.4`
folgt: $\mathsf{ran}\,(\uparrow 0) = \{1\}$.

`3.f):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `1.5`
folgt: $\uparrow 0 : \mathbb{A} \to \{1\}$.

`3.g):` Aus **315-1(RekParDef)** "$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `2.2`
folgt: $\uparrow 0 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

<u>Beweis</u> **315-5** `h)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus $\in$**schola**"1 Menge" und
aus `1`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **214-4**: $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A})(x) = 1$.

`3:` Aus **315-1(RekParDef)**"$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus `2`
folgt: $(\uparrow 0)(x) = 1$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \uparrow 0 = 1$.

`h)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \uparrow 0 = 1$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $(\uparrow 0)(x) = 1$.

`2:` Aus `1` und
aus **315-1(RekParDef)**"$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$"
folgt: $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A})(x) = 1$.

`3:` Aus `1`"$(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A})(x) = 1$"
folgt via **214-4**: $((x \in \mathbb{A}) \wedge (1 \text{ Menge})) \vee (1 = \mathcal{U})$.

`4:` Aus **315-4**"$1 \neq \mathcal{U}$" und
aus `3`
folgt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (1 \text{ Menge})$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x \in \mathbb{A}$.

`6:` Aus `5`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

Beweis **315-5** `i)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $x \notin \mathbb{A}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 0) = \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 0)$.

`3:` Aus `2`“$x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 0)$”
folgt via **17-4**: $(\uparrow 0)(x) = \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`
folgt: $x \uparrow 0 = \mathcal{U}$.

`i)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \uparrow 0 = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS`
folgt: $(\uparrow 0)(x) = \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`“$(\uparrow 0)(x) = \mathcal{U}$”
folgt via **17-4**: $x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 0)$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 0) = \mathbb{A}$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $x \notin \mathbb{A}$.

`j)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via des bereits bewiesenen `h)`: $x \uparrow 0 = 1$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via des bereits bewiesenen `i)`: $x \uparrow 0 = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \uparrow 0 = 1) \vee (x \uparrow 0 = \mathcal{U})$.

□

315-6. Es ist an der Zeit, sich mit $(1^{\mathbf{on}}x) \therefore y$ auseinander zu setzen.

315-6(Satz)

a) $(1^{\mathbf{on}}x) \therefore y = y \cap (x \times \mathbb{A})$.

b) *Aus* "$y \subseteq x \times \mathbb{A}$" *folgt* "$(1^{\mathbf{on}}x) \therefore y = y$".

c) *Aus* "$f : D \to \mathbb{A}$" *und* "$D \subseteq x$" *folgt* "$(1^{\mathbf{on}}x) \therefore f = f$".

d) *Aus* "$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" *folgt* "$(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \therefore f = f$".

e) $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \therefore \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **315-6** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \therefore y$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \therefore y$"
folgt via **248-12**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in 1^{\mathbf{on}}x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi \cdot \Gamma)).$$

`3.1:` Aus 2 "$\ldots (\Omega, \Phi) \in 1^{\mathbf{on}}x \ldots$"
folgt via **214-2**: $(\Omega \in x) \wedge (\Phi = 1)$.

`3.2:` Aus 2 "$\ldots \Gamma$ Zahl$\ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: $\Gamma \in \mathbb{A}$.

`3.3:` Aus 2 "$\ldots \Gamma$ Zahl$\ldots$"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot \Gamma = \Gamma$.

`4.1:` Aus `3.1` "$\ldots \Phi = 1$" und
aus `3.3`
folgt: $\Phi \cdot \Gamma = \Gamma$.

`4.2:` Aus `3.1` "$\Omega \in x \ldots$" und
aus `3.2` "$\Gamma \in \mathbb{A}$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \Gamma) \in x \times \mathbb{A}$.

...

...

Beweis **315-6** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \therefore y.$

...

`5.1:` Aus `4.1`"$\Phi \cdot \Gamma = \Gamma$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi \cdot \Gamma) = (\Omega, \Gamma).$

`5.2:` Aus `2`"$\ldots (\Omega, \Gamma) \in y \ldots$" und
aus `4.2`"$(\Omega, \Gamma) \in x \times \mathbb{A}$"
folgt via **2-2**: $(\Omega, \Gamma) \in y \cap (x \times \mathbb{A}).$

`6:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi \cdot \Gamma)$" und
aus `5.1`
folgt: $\alpha = (\Omega, \Gamma).$

`7:` Aus `6` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in y \cap (x \times \mathbb{A}).$

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \therefore y) \Rightarrow (\alpha \in y \cap (x \times \mathbb{A})).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"}(1^{\mathbf{on}}x) \therefore y \subseteq y \cap (x \times \mathbb{A})\text{"}}$

<u>Beweis</u> **315-6** `a)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in y \cap (x \times \mathbb{A})$

`2:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in y \cap (x \times \mathbb{A})$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in y) \wedge (\alpha \in x \times \mathbb{A})$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \alpha \in x \times \mathbb{A}$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi))$.

`4.1:` Aus `3`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `2`"$\alpha \in y \ldots$"
folgt: $(\Omega, \Phi) \in y$.

`4.2:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und
aus $\in$**schola**"1 Menge"
folgt via **214-2**: $(\Omega, 1) \in 1^{\mathbf{on}} x$.

`4.3:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: Φ Zahl.

`5.1:` Aus `4.2`"$(\Omega, 1) \in 1^{\mathbf{on}} x$",
aus `4.1`"$(\Omega, \Phi) \in y$",
aus $\in$**schola**"1 Zahl" und
aus `4.3`"Φ Zahl"
folgt via **248-12**: $(\Omega, 1 \cdot \Phi) \in (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.\cdot.} y$.

`5.2:` Aus `4.3`"Φ Zahl"
folgt via **FSM**1: $1 \cdot \Phi = \Phi$.

`6:` Aus `5.2`"$1 \cdot \Phi = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, 1 \cdot \Phi) = (\Omega, \Phi)$.

`7:` Aus `5.1` und
aus `6`
folgt: $(\Omega, \Phi) \in (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.\cdot.} y$.

`8:` Aus `2`"$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi)$" und
aus `7`
folgt: $\alpha \in (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.\cdot.} y$.

...

Beweis **315-6** `a)` ...

Ergo `Thema1.2`: $\forall\alpha : (\alpha \in y \cap (x \times \mathbb{A})) \Rightarrow (\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}y \cap (x \times \mathbb{A}) \subseteq (1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$(1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y \subseteq y \cap (x \times \mathbb{A})$” und
aus `A2` gleich “$y \cap (x \times \mathbb{A}) \subseteq (1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y = y \cap (x \times \mathbb{A})$.

`b)` `VS` gleich $y \subseteq x \times \mathbb{A}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$y \subseteq x \times \mathbb{A}$”
folgt via **2-10**: $y \cap (x \times \mathbb{A}) = y$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y = y \cap (x \times \mathbb{A})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} y = y$.

`c)` `VS` gleich $(f : D \to \mathbb{A}) \wedge (D \subseteq x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$f : D \to A \ldots$”
folgt via **259-28**: $f \subseteq D \times \mathbb{A}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$\ldots D \subseteq x$”
folgt via **6-7**: $D \times \mathbb{A} \subseteq x \times \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.1`“$f \subseteq D \times \mathbb{A}$” und
aus `1.2`“$D \times \mathbb{A} \subseteq x \times \mathbb{A}$”
folgt via **0-6**: $f \subseteq x \times \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2`“$f \subseteq x \times \mathbb{A}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{\therefore} f = f$.

`d)` `VS` gleich $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`1:` Via **0-6** gilt: $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$” und
aus `1`“$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $(1^{\mathbf{on}}f) \mathbin{\therefore} f = f$.

`e)`

`1:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathbin{\therefore} \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

$\square$

315-7. Für id_x gelten ähnliche Aussagen wie **315-5**`h,i,j`.

315-7(Satz)

a) *“$(y \in x) \vee (y = \mathcal{U})$” genau dann, wenn “$\mathsf{id}_x(y) = y$”.*

b) *“$y \notin x$” genau dann, wenn “$\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}$”.*

c) *“$\mathsf{id}_x(y) = y$” oder “$\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}$”.*

d) *“$(y$ Zahl$) \vee (y = \mathcal{U})$” genau dann, wenn “$\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(y) = y$”.*

Beweis **315-7** `a)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(y \in x) \vee (y = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $y \in x$.

Aus `0.1.Fall` “$y \in x$”

folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_x(y) = y$.

`0.2.Fall` $y = \mathcal{U}$.

1: $\mathsf{id}_x(y) \stackrel{\texttt{0.2.Fall}}{=} \mathsf{id}_x(\mathcal{U}) \stackrel{\textbf{17-7}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\texttt{0.2.Fall}}{=} y$.

2: Aus 1 folgt: $\mathsf{id}_x(y) = y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{id}_x(y) = y$.

Beweis **315-7** a) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\mathsf{id}_x(y) = y.$

1: Es gilt: $(y \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x)) \vee (y \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x)).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x).$

2: Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x) = x.$

3: Aus `1.1.Fall` und
aus 2
folgt: $y \in x.$

`1.2.Fall` $y \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x).$

Aus `1.2.Fall` "$y \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x)$"
folgt via **17-4**: $\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{id}_x(y) = y) \vee (\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}).$

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $y \notin x.$

1: Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x) = x.$

2: Aus VS und
aus 1
folgt: $y \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x).$

3: Aus 2 "$y \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x)$"
folgt via **17-4**: $\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}.$

b) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}.$

1: Aus VS gleich "$\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}$"
folgt via **17-4**: $y \notin \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x).$

2: Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_x) = x.$

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $y \notin x.$

<u>Beweis **315-7**</u> `c)`

`1:` Es gilt: $(y \in x) \vee (y \notin x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in x$.

Aus `1.1.Fall` "$y \in x$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{id}_x(y) = y$.

`1.2.Fall` $y \notin x$.

Aus `1.2.Fall` "$y \notin x$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{id}_x(y) = y) \vee (\mathsf{id}_x(y) = \mathcal{U}).$$

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $((y \in \mathbb{A}) \vee (y = \mathcal{U})) \Leftrightarrow (\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(y) = y)$.

`2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y \text{ Zahl})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $((y \text{ Zahl}) \vee (y = \mathcal{U})) \Leftrightarrow (\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(y) = y)$.

□

315-8. Fast so einfach wie die Diskussion von $\uparrow 0$ ist die Diskussion von $\uparrow 1$.

315-8(Satz)

a) $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

b) $\uparrow 1$ *Menge.*

c) $\uparrow 1$ *Relation.*

d) $\uparrow 1$ *Funktion.*

e) $\mathsf{dom}\,(\uparrow 1) = \mathbb{A}$.

f) $\mathsf{ran}\,(\uparrow 1) = \mathbb{A}$.

g) $\uparrow 1 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

h) *"$(x$ Zahl$) \vee (x = \mathcal{U})$" genau dann, wenn "$x \uparrow 1 = x$".*

i) *"$x \notin \mathbb{A}$" genau dann, wenn "$x \uparrow 1 = \mathcal{U}$".*

j) *"$x \uparrow 1 = x$" oder "$x \uparrow 1 = \mathcal{U}$".*

RECH-**Notation**.

Beweis **315-8** a)

1: Aus $\in$**schola**"$0 \in \mathbb{N}$"
folgt via **315-1(RekParDef)**: $\uparrow (1 + 0) = (\uparrow 0) \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

2: Aus $+$**schola**"$1 + 0$" und
aus 1"$\uparrow (1 + 0) = (\uparrow 0) \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$"
folgt: $\uparrow 1 = (\uparrow 0) \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

3: Aus **315-1(RekParDef)**"$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$" und
aus 2
folgt: $\uparrow 1 = (1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

4: Aus 3 und
aus **315-6**"$(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$"
folgt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

<u>Beweis **315-8**</u> `b)`

1: Aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **30-13**: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Menge.

2: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\uparrow 1$ Menge.

`c)`

1: Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion.

2: Aus 1“$\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion”
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Relation.

3: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\uparrow 1$ Relation.

`d)`

1: Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion.

2: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\uparrow 1$ Funktion.

`e)`

1: Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$.

2: Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 1) = \mathbb{A}$.

Beweis **315-8** `f)`

`1:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}.$

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(\uparrow 1) = \mathbb{A}.$

`g)`

`1:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}.$

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}.$

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\uparrow 1 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}.$

`h)`

`1:` Via **315-7** gilt: $((x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})) \Leftrightarrow (\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) = x).$

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}.$

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $((x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})) \Leftrightarrow ((\uparrow 1)(x) = x).$

`4:` Aus `3`
folgt: $((x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})) \Leftrightarrow ((x \uparrow 1) = x).$

`i)`

`1:` Via **315-7** gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) = \mathcal{U}).$

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}.$

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow ((\uparrow 1)(x) = \mathcal{U}).$

`4:` Aus `3` folgt: $(x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \uparrow 1 = \mathcal{U}).$

<u>Beweis</u> **315-8** `j)`

`1:` Via **315-7** gilt: $(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) = x) \vee (\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) = \mathcal{U})$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $((\uparrow 1)(x) = x) \vee ((\uparrow 1)(x) = \mathcal{U})$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(x \uparrow 1 = x) \vee (x \uparrow 1 = \mathcal{U})$.

□

315-9. Aus $f : D \to B$ und $x \in D$ folgt in etwas technischer Weise $(x, f(x)) \in f$.

315-9(Satz)

a) *Aus* "$f : D \to B$" *und* "$x \in D$"
folgt "$f(x) \in \mathsf{ran}\, f$" *und* "$(x, f(x)) \in f$".

b) *Aus* "$(p, q) \in f : D \to B$"
folgt "$p \in D$" *und* "$q \in B$" *und* "$q = f(p)$".

c) $(x \downharpoonleft y)^{-1}[z] = y \cap x^{-1}[z]$.

d) $\mathsf{dom}\,(z \circ (x \downharpoonleft y)) = y \cap x^{-1}[\mathsf{dom}\, z]$.

e) $\mathsf{ran}\,(z \circ (x \downharpoonleft y)) = z[x[y]]$.

f) "$(x \downharpoonleft \mathsf{dom}\, x) = x$" *genau dann, wenn* "$x$ *Relation*".

g) *Aus* "$p \in (x \downharpoonleft y)$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (p = (\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Omega \in y) \wedge (\Phi$ *Menge*$)$".

Beweis **315-9** a) VS gleich $(f : D \to B) \wedge (x \in D)$.

1: Aus VS gleich "$f : D \to B \ldots$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f$ Funktion$) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D)$.

2: Aus VS gleich "$\ldots x \in D$" und
aus 1"$\ldots \mathsf{dom}\, f = D$"
folgt: $x \in \mathsf{dom}\, f$.

3.1: Aus 1"f Funktion$\ldots$" und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $\boxed{f(x) \in \mathsf{ran}\, f}$

3.2: Aus 1"f Funktion$\ldots$" und
aus 2"$x \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $\boxed{(x, f(x)) \in f}$

Beweis **315-9** `b)` `VS` gleich $(p,q)\in f:D\to B$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots f:D\to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\, f=D)\wedge(\mathsf{ran}\, f\subseteq B)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in f\ldots$"
folgt via **7-5**: $(p\in\mathsf{dom}\, f)\wedge(q\in\mathsf{ran}\, f)$.

`2.1:` Aus `1.2`"$(p,q)\in f\ldots$" und
aus `1.1`"f Funktion..."

folgt via **18-20**: $\boxed{q=f(p)}$

`2.2:` Aus `1.2`"$p\in\mathsf{dom}\, f\ldots$" und
aus `1.1`"$\ldots\mathsf{dom}\, f=D\ldots$"

folgt: $\boxed{p\in D}$

`2.3:` Aus `1.2`"$\ldots q\in\mathsf{ran}\, f$" und
aus `1.1`"$\ldots\mathsf{ran}\, f\subseteq B$"

folgt via **0-4**: $\boxed{q\in B}$

`c)`

`1:` Via **258-11** gilt: $(x\downharpoonleft y)$ Einschränkung von x auf y.

`2:` Aus `1`"$(x\downharpoonleft y)$ Einschränkung von x auf y"
folgt via **15-10**: $(x\downharpoonleft y)^{-1}[z]=y\cap x^{-1}[z]$.

`d)`

`1:` $\mathsf{dom}\,(z\circ(x\downharpoonleft y))\stackrel{\mathbf{14-6}}{=}(x\downharpoonleft y)^{-1}[\mathsf{dom}\, z]\stackrel{\text{c)}}{=}y\cap x^{-1}[\mathsf{dom}\, z]$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{dom}\,(z\circ(x\downharpoonleft y))=y\cap x^{-1}[\mathsf{dom}\, z]$.

Beweis **315-9** `e)`

`1:` $\mathsf{ran}\,(z\circ(x\downharpoonright y))\overset{\mathbf{14-6}}{=}z[\mathsf{ran}\,(x\downharpoonright y)]\overset{\text{d)}}{=}z[x[y]].$

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{ran}\,(z\circ(x\downharpoonright y))=z[x[y]].$

`f)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $(x\downharpoonright\mathsf{dom}\,x)=x.$

`1:` Via **258-11** gilt: $(x\downharpoonright\mathsf{dom}\,x)$ Relation.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: x Relation.

`f)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich x Relation.

`1:` Aus `VS` gleich "x Relation"
folgt via **15-9**: x Einschränkung von x auf $\mathsf{dom}\,x$.

`2:` Via **258-11** gilt: $(x\downharpoonright\mathsf{dom}\,x)$ Einschränkung von x auf $\mathsf{dom}\,x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt via **15-2**: $x=(x\downharpoonright\mathsf{dom}\,x).$

`4:` Aus `3`
folgt: $(x\downharpoonright\mathsf{dom}\,x)=x.$

`g)` `VS` gleich $p\in(x\downharpoonright y).$

`1:` Via **258-11** gilt: $(x\downharpoonright y)$ Einschränkung von x auf y.

`2:` Aus `1` "$(x\downharpoonright y)$ Einschränkung von x auf y" und
aus `VS` gleich "$p\in(x\downharpoonright y)$"
folgt via **15-4**: $\exists\Omega,\Phi:(p=(\Omega,\Phi)\in x)\wedge(\Omega\in y)\wedge(\Phi\text{ Menge}).$

□

315-10. Es gilt $x \circ \mathsf{id}_y = (x \upharpoonright y)$. Somit könnte $(x \upharpoonright y)$ ohne Weiteres durch Elementareres ersetzt werden.

315-10(Satz)

a) $x \circ \mathsf{id}_y = (x \upharpoonright y)$.

b) *"x Relation" genau dann, wenn "*$x \circ \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,x} = x$*".*

Beweis **315-10** a)

`Thema1.1` $\alpha \in x \circ \mathsf{id}_y$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in x \circ \mathsf{id}_y$"
folgt via **14-3**:
$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_y) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in x) \wedge (\alpha = (\Omega, \Gamma)).$$

3: Aus 2 "$\ldots (\Omega, \Phi) \in \mathsf{id}_y \ldots$"
folgt via **20-10**: $(\Omega \in y) \wedge (\Omega = \Phi)$.

4: Aus 3 "$\ldots \Omega = \Phi$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Gamma) = (\Phi, \Gamma)$.

5: Aus 4 und
aus 2 "$\ldots (\Phi, \Gamma) \in x$"
folgt: $(\Omega, \Gamma) \in x$.

6: Aus 3 "$\Omega \in y \ldots$" und
aus 5 "$(\Omega, \Gamma) \in x$"
folgt via **299-5**: $(\Omega, \Gamma) \in (x \upharpoonright y)$.

7: Aus 2 "$\ldots \alpha = (\Omega, \Gamma)$" und
aus 6
folgt: $\alpha \in (x \upharpoonright y)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in x \circ \mathsf{id}_y) \Rightarrow (\alpha \in (x \upharpoonright y))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$x \circ \mathsf{id}_y \subseteq (x \upharpoonright y)$"

...

Beweis **315-10** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in (x \downharpoonleft y)$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in (x \downharpoonleft y)$”
folgt via **315-9**: $\exists \Omega, \Phi : (\alpha = (\Omega, \Phi) \in x) \wedge (\Omega \in y)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \in y$”
folgt via **20-9**: $(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_y$.

`4:` Aus `3`“$(\Omega, \Omega) \in \mathsf{id}_y$” und
aus `2`“$\ldots (\Omega, \Phi) \in x$”
folgt via **14-5**: $(\Omega, \Phi) \in x \circ \mathsf{id}_y$.

`5:` Aus `2`“$\ldots \alpha = (\Omega, \Phi) \ldots$” und
aus `4`
folgt: $\alpha \in x \circ \mathsf{id}_y$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in (x \downharpoonleft y)) \Rightarrow (\alpha \in x \circ \mathsf{id}_y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}(x \downharpoonleft y) \subseteq x \circ \mathsf{id}_y\text{”}}$

`1.3:` Aus `A1` gleich “$x \circ \mathsf{id}_y \subseteq (x \downharpoonleft y)$” und
aus `A2` gleich “$(x \downharpoonleft y) \subseteq x \circ \mathsf{id}_y$”
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x \circ \mathsf{id}_y = (x \downharpoonleft y)$.

`b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich x Relation.

`1:` Aus `VS` gleich “x Relation”
folgt via **315-9**: $(x \downharpoonleft \mathsf{dom}\, x) = x$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $x \circ \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x} = (x \downharpoonleft \mathsf{dom}\, x)$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x \circ \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x} = x$.

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $x \circ \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x} = x$.

`1:` Via **14-8** gilt: $x \circ \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\, x}$ Relation.

`2:` Aus `1` und
aus `VS`
folgt: x Relation.

□

315-11. Es gilt $1^{\mathbf{on}}x \mathrel{.\colon.} y = \mathsf{rez} \circ y$ und $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathrel{.\colon.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{rez}$.

315-11(Satz)

a) $(1^{\mathbf{on}}x) \mathrel{.\colon.} y = \mathsf{rez} \circ (y \mid x)$.

b) $\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}x) \mathrel{.\colon.} y) = x \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.

c) $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}x) \mathrel{.\colon.} y) = \mathsf{rez}[y[x]]$.

d) *Aus* "y *Relation*" *folgt* "$(1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\,y) \mathrel{.\colon.} y = \mathsf{rez} \circ y$"
und "$\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\,y) \mathrel{.\colon.} y) = y^{-1}[\mathbb{A}]$"
und "$\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\,y) \mathrel{.\colon.} y) = \mathsf{rez}[\mathsf{ran}\,y]$".

e) *Aus* "$f : D \to B$" *folgt* "$(1^{\mathbf{on}}D) \mathrel{.\colon.} f = \mathsf{rez} \circ f$"
und "$\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}D) \mathrel{.\colon.} f) = \mathsf{rez}[\mathsf{ran}\,f]$"
und "$(1^{\mathbf{on}}D) \mathrel{.\colon.} f : f^{-1}[\mathbb{A}] \to \mathsf{rez}[B]$".

f) $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathrel{.\colon.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{rez}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **315-11** a)

`Thema1.1` $\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \mathrel{.\colon.} y$.

2: Aus `Thema1.1` "$\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \mathrel{.\colon.} y$"
folgt via **248-32**:

$$\exists \Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in 1^{\mathbf{on}}x) \wedge ((\Omega, \Gamma) \in y) \wedge (\Phi, \Gamma \text{ Zahl}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Phi : \Gamma))$$

...

...

Beweis **315-11** `a)`...

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x)\ .\because.\ y.$

...

`3.1:` Aus 2"... $(\Omega, \Phi) \in 1^{\mathbf{on}}x$ ..."
folgt via **214-2**: $(\Omega \in x) \wedge (\Phi = 1).$

`3.2:` Via **123-6** gilt: $1 : \Gamma = \mathsf{rez}(\Gamma).$

`3.3:` Aus 2"... Γ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $\Gamma \in \mathbb{A}.$

`3.4:` Aus `3.1`"$\Omega \in x$" und
aus 2"... $(\Omega, \Gamma) \in y$"
folgt via **299-5**: $(\Omega, \Gamma) \in (y \downharpoonleft x).$

`4.1:` Aus `3.1`"... $\Phi = 1$" und
aus `3.2`
folgt: $\Phi : \Gamma = \mathsf{rez}(\Gamma).$

`4.2:` Aus `3.3`"$\Gamma \in \mathbb{A}$" und
aus **AAII**"$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$"
folgt via **315-9**: $(\Gamma, \mathsf{rez}(\Gamma)) \in \mathsf{rez}.$

`5.1:` Aus `4.1`"$\Phi : \Gamma = \mathsf{rez}(\Gamma)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Phi : \Gamma) = (\Omega, \mathsf{rez}(\Gamma)).$

`5.2:` Aus `3.4`"... $(\Omega, \Gamma) \in (y \downharpoonleft x)$ ..." und
aus `4.2`"$(\Gamma, \mathsf{rez}(\Gamma)) \in \mathsf{rez}$"
folgt via **14-5**: $(\Omega, \mathsf{rez}(\Gamma)) \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x).$

`6:` Aus 2"... $\alpha = (\Omega, \Phi : \Gamma)$" und
aus `5.1`
folgt: $\alpha = (\Omega, \mathsf{rez}(\Gamma)).$

`7:` Aus `6` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x).$

...

<u>Beweis **315-11**</u> `a)` ...

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in (1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{.\!:\!.} y) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x))$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}(1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{.\!:\!.} y \subseteq \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)\text{”}}$

`Thema1.2` $\alpha \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)$”
folgt via **14-3**:
$\exists\Omega, \Phi, \Gamma : ((\Omega, \Phi) \in (y \downharpoonleft x)) \wedge ((\Phi, \Gamma) \in \mathsf{rez}) \wedge (\alpha = (\Omega, \Gamma))$.

`3.1:` Aus 2“$\ldots (\Omega, \Phi) \in (y \downharpoonleft x) \ldots$”
folgt via **299-5**: $((\Omega, \Phi) \in y) \wedge (\Omega \in x)$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots (\Phi, \Gamma) \in \mathsf{rez} \ldots$” und
aus **AAII**“$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **315-9**: $(\Phi \in \mathbb{A}) \wedge (\Gamma = \mathsf{rez}(\Phi))$.

`4.1:` Aus `3.1`“$\ldots \Omega \in x$” und
aus $\in$**schola**“1 Menge”
folgt via **214-2**: $(\Omega, 1) \in 1^{\mathbf{on}}x$.

`4.2:` Aus `3.2`“$\Phi \in \mathbb{A} \ldots$”
folgt via **95-4(Def)**: Φ Zahl.

`4.3:` Via **123-6** gilt: $\mathsf{rez}(\Phi) = 1 : \Phi$.

`5.1:` Aus `4.1`“$(\Omega, 1) \in 1^{\mathbf{on}}x$”,
aus `3.1`“$(\Omega, \Phi) \in y \ldots$”,
aus $\in$**schola**“1 Zahl” und
aus `4.2`“Φ Zahl”
folgt via **248-32**: $(\Omega, 1 : \Phi) \in (1^{\mathbf{on}}x) \mathbin{.\!:\!.} y$.

`5.2:` Aus `3.2`“$\ldots \Gamma = \mathsf{rez}(\Phi)$” und
aus `4.3`
folgt: $\Gamma = 1 : \Phi$.

`6:` Aus `5.2`“$\Gamma = 1 : \Phi$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Gamma) = (\Omega, 1 : \Phi)$.

...

...

Beweis **315-11** a) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)$.

...

7: Aus 2"... $\alpha = (\Omega, \Gamma)$" und
aus 6
folgt: $\alpha = (\Omega, 1 : \Phi)$.

8: Aus 7 und
aus 5.1
folgt: $\alpha \in (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)) \Rightarrow (\alpha \in (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$\mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x) \subseteq (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y$"

1.3: Aus A1 gleich "$(1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y \subseteq \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)$" und
aus A2 gleich "$\mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x) \subseteq (1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y = \mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)$.

b)

1: $\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y) \stackrel{\text{a)}}{=} \mathsf{dom}\,(\mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)) \stackrel{\mathbf{315-9}}{=} x \cap y^{-1}[\mathsf{dom}\,\mathsf{rez}]$
$\stackrel{\mathbf{96-1}}{=} x \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y) = x \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.

c)

1: $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y) \stackrel{\text{a)}}{=} \mathsf{ran}\,(\mathsf{rez} \circ (y \downharpoonleft x)) \stackrel{\mathbf{315-9}}{=} \mathsf{rez}[y[x]]$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}} x) \mathbin{.:.} y) = \mathsf{rez}[y[x]]$.

<u>Beweis **315-11**</u> `d)` `VS` gleich y Relation.

`1:` Aus `VS` gleich "y Relation"
folgt via **315-9**: $(y \rfloor \mathsf{dom}\, y) = y$.

`2.1:` $(1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, y) \;.\!:\!.\; y \stackrel{\text{a)}}{=} \mathsf{rez} \circ (y \rfloor \mathsf{dom}\, y) \stackrel{1}{=} \mathsf{rez} \circ y$.

`2.2:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt:
$\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, y) \;.\!:\!.\; y) = (\mathsf{dom}\, y) \cap y^{-1}[\mathbb{A}]$.

`2.3:` $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, y) \;.\!:\!.\; y) \stackrel{\text{c)}}{=} \mathsf{rez}[y[\mathsf{dom}\, y]] \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} \mathsf{rez}[\mathsf{ran}\, y]$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{(1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, y) \;.\!:\!.\; y = \mathsf{rez} \circ y}$

`3.2:` Via **11-19** gilt: $y^{-1}[\mathbb{A}] \subseteq \mathsf{dom}\, y$.

`3.3:` Aus `2.3`
folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, y) \;.\!:\!.\; y) = \mathsf{rez}[\mathsf{ran}\, y]}$

`4:` Aus `3.2`"$y^{-1}[\mathbb{A}] \subseteq \mathsf{dom}\, y$"
folgt via **2-10**: $(\mathsf{dom}\, y) \cap y^{-1}[\mathbb{A}] = y^{-1}[\mathbb{A}]$.

`5:` Aus `2.2` und
aus `4`
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, y) \;.\!:\!.\; y) = y^{-1}[\mathbb{A}]}$

`e)` `VS` gleich $f : D \to B$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = D) \wedge (\mathsf{ran}\, f \subseteq B)$.

`1.2:` Via **214-4** gilt: $1^{\mathbf{on}}D$ Funktion.

`2.1:` Aus `1.1`"f Funktion..."
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

`2.2:` Aus `1.2`"$1^{\mathbf{on}}D$ Funktion" und
aus `1.1`"f Funktion..."
folgt via **248-41**: $(1^{\mathbf{on}}D) \;.\!:\!.\; f$ Funktion.

...

<u>Beweis **315-11**</u> `e)` `VS` gleich $f : D \to B$.

...

`3.1:` Aus `2.1`“ f Relation ”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $(1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, f)\;.\!:\!.\; f = \mathsf{rez} \circ f$.

`3.2:` Aus `2.1`“ f Relation ”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, f)\;.\!:\!.\; f) = f^{-1}[\mathbb{A}]$.

`3.3:` Aus `2.1`“ f Relation ”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}\mathsf{dom}\, f)\;.\!:\!.\; f) = \mathsf{rez}[\mathsf{ran}\, f]$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1.1`“ $\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$ ”
folgt: $\boxed{(1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f = \mathsf{rez} \circ f}$

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `1.1`“ $\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$ ”
folgt: $\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f) = f^{-1}[\mathbb{A}]$.

`4.3:` Aus `3.3` und
aus `1.1`“ $\ldots \mathsf{dom}\, f = D \ldots$ ”
folgt: $\boxed{\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f) = \mathsf{rez}[\mathsf{ran}\, f]}$

`4.4:` Aus `1.1`“ $\ldots \mathsf{ran}\, f \subseteq B$ ”
folgt via **8-9**: $\mathsf{rez}[\mathsf{ran}\, f] \subseteq \mathsf{rez}[B]$.

`5:` Aus `4.3` und
aus `4.4`
folgt: $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f) \subseteq \mathsf{rez}[B]$.

`6:` Aus `2.2`“ $(1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f$ Funktion ” ,
aus `4.2`“ $\mathsf{dom}\,((1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f) = f^{-1}[\mathbb{A}]$ ” und
aus `5`“ $\mathsf{ran}\,((1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f) \subseteq \mathsf{rez}[B]$ ”
folgt via **21-1(Def)**: $\boxed{(1^{\mathbf{on}}D)\;.\!:\!.\; f : f^{-1}[\mathbb{A}] \to \mathsf{rez}[B]}$

<u>Beweis **315-11** `f)`</u>

`1:` Via **21-13** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1` "$\mathsf{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A})\ .\!:\!.\ \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{rez} \circ \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`3:` Aus **AAII** "$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\mathsf{rez}\ \text{Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\mathsf{rez} = \mathbb{A})$.

`4:` Aus `3` "rez Funktion…"
folgt via **18-18(Def)**: rez Relation

`5:` Aus `4` "rez Relation"
folgt via **315-10**: $\mathsf{rez} \circ \mathsf{id}_{\mathsf{dom}\,\mathsf{rez}} = \mathsf{rez}$.

`6:` Aus `5` und
aus `3` "…$\mathsf{dom}\,\mathsf{rez} = \mathbb{A}$"
folgt: $\mathsf{rez} \circ \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{rez}$.

`7:` Aus `2` und
aus `6`
folgt: $(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A})\ .\!:\!.\ \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{rez}$.

$\square$

315-12. Interessanter Weise ging ich bislang der Bestimmung von $\mathsf{ran\,rez}$ aus dem Weg.

315-12(Satz)

a) *"$\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$ Zahl" und "$\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\in\mathbb{A}$".*

b) *"$\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$ Zahl" und "$\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\in\mathbb{A}$".*

c) $\{\mathsf{nan},\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan},\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\}\cup\mathbb{C}\subseteq\mathbb{A}$.

d) $\mathsf{ran\,rez}=\{\mathsf{nan},\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan},\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\}\cup\mathbb{C}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **315-12** a)

1: Aus **95-5**"i Zahl" und
aus **95-5**"nan Zahl"

folgt via **96-15**: $\boxed{\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\text{ Zahl}}$

2: Aus 1"$\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$ Zahl"

folgt via **95-4(Def)**: $\boxed{\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\in\mathbb{A}}$

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$ Zahl.

2: Aus **95-5**"nan Zahl" und
aus 1"$\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$ Zahl"

folgt via **96-13**: $\boxed{\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\text{ Zahl}}$

3: Aus 1"$\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}$ Zahl"

folgt via **95-4(Def)**: $\boxed{\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\in\mathbb{A}}$

Beweis **315-12** `c)`

`Thema1` $\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

2: Aus `Thema1`“$\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$”
folgt via **0-2**: $(\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\}) \vee (\alpha \in \mathbb{C})$.

3: Aus 2
folgt: $(\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha \in \mathbb{C})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha = \mathsf{nan}$.
Aus `3.1.Fall` und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$”
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.2.Fall` $\alpha = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.
Aus `3.2.Fall` und
aus `a)`“$\mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A}$”
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.3.Fall` $\alpha = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$.
Aus `3.2.Fall` und
aus `b)`“$\mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan} \in \mathbb{A}$”
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.4.Fall` $\alpha \in \mathbb{C}$.

1: Aus `3.4.Fall`“$\alpha \in \mathbb{C}$”
folgt via $\in$**SZ**: α Zahl.

2: Aus 1“α Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1`:

$$\forall \alpha : (\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A}).$$

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **315-12** `d)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{rez}$.

`2:` Aus **AAII**"$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{rez}$"
folgt via **312-9**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha = \mathsf{rez}(\Omega))$.

`3.1:` Aus `2`"$\ldots \Omega \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: Ω Zahl.

`3.2:` Via **123-6** gilt: $\mathsf{rez}(\Omega) = 1 : \Omega$.

`4.1:` Aus `3`"Ω Zahl"
folgt via **137-10**:
$(1 : \Omega \in \mathbb{C}) \vee (1 : \Omega = \mathsf{nan}) \vee (1 : \Omega = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$
$\vee (1 : \Omega = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`4.2:` Aus `2`"$\ldots \alpha = \mathsf{rez}(\Omega)$" und
aus `3.2`
folgt: $\alpha = 1 : \Omega$.

`5:` Aus `4.2` und
aus `4.1`
folgt:
$(\alpha \in \mathbb{C}) \vee (\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.
`Fallunterscheidung`

...

...

Beweis **315-12** `d)` ...

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ran\,rez}$.

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\alpha \in \mathbb{C}$.

Aus `5.1.Fall` "$\alpha \in \mathbb{C}$"

folgt via **2-2**: $\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

`5.2.Fall` $(\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$.

`6:` Aus `5.2.Fall`
folgt: $\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\}$.

`7:` Aus 7
folgt via **2-2**: $\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran\,rez}) \Rightarrow (\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | "$\mathsf{ran\,rez} \subseteq \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$"

...

<u>Beweis **315-12**</u> `d)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$"
folgt via **2-2**: $(\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\}) \vee (\alpha \in \mathbb{C})$.

`2.2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$" und
aus `c)` "$\{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt:
$(\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha \in \mathbb{C})$.

`3.2:` Aus `2.2` "$\alpha \in \mathbb{A}$" und
aus **AAII** "$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$"
folgt via **21-4**: $\mathsf{rez}(\alpha) \in \mathbb{A}$.

`3.3:` Via **123-6** gilt: $\mathsf{rez}(\alpha) = 1 : \alpha$.

`4.1:` Aus `3.1` "$(\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}) \vee (\alpha = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan})$
$\vee (\alpha \in \mathbb{C})$"
folgt via **141-1**: $1 : (1 : \alpha) = \alpha$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $1 : \alpha \in \mathbb{A}$.

`4.3:` Via **123-6** gilt: $\mathsf{rez}(1 : \alpha) = 1 : (1 : \alpha)$.

`5.1:` Aus `4.1` und
aus `4.3`
folgt: $\mathsf{rez}(1 : \alpha) = \alpha$.

`5.2:` Aus **AAII** "$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `4.2` "$1 : \alpha \in \mathbb{A}$"
folgt via **315-9**: $\mathsf{rez}(1 : \alpha) \in \mathsf{ran}\,\mathsf{rez}$.

`6:` Aus `5.1` und
aus `5.2`
folgt: $\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{rez}$.

...

<u>Beweis</u> **315-12** `d)` ...

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{ran}\,\mathsf{rez})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$\{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C} \subseteq \mathsf{ran}\,\mathsf{rez}$"

`1.3`: Aus `A1` gleich "$\mathsf{ran}\,\mathsf{rez} \subseteq \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$" und
aus `A2` gleich "$\{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C} \subseteq \mathsf{ran}\,\mathsf{rez}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{ran}\,\mathsf{rez} = \{\mathsf{nan}, \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}, \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

□

315-13. Es gilt $\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$.

<u>**315-13(Satz)**</u>

a) $\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$.

b) $\uparrow(-1)$ *Menge.*

c) $\uparrow(-1)$ *Relation.*

d) $\uparrow(-1)$ *Funktion.*

e) $\mathsf{dom}\,(\uparrow(-1)) = \mathbb{A}$.

f) $\mathsf{ran}\,(\uparrow(-1)) = \{\mathsf{nan}, \mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}, \mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

g) $\uparrow(-1) : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

h) $x \uparrow(-1) = 1 : x$.

<u>RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **315-13**</u> a)

1: Aus $\in$**schola**“$0 \in \mathbb{N}$”
folgt via **315-1(RekParDef)**: $\uparrow(-1+0) = (\uparrow(-0)) \mathbin{.:.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

2: Aus $+$**schola**“$-1+0 = -1$” und
aus 1
folgt: $\uparrow(-1) = (\uparrow(-0)) \mathbin{.:.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

3: Aus **98-15**“$-0 = 0$” und
aus 2
folgt: $\uparrow(-1) = (\uparrow 0) \mathbin{.:.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

4: Aus 3 und
aus **315-1(RekParDef)**“$\uparrow 0 = 1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}$”
folgt: $\uparrow(-1) = (1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathbin{.:.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

5: Aus 4 und
aus **315-11**“$(1^{\mathbf{on}}\mathbb{A}) \mathbin{.:.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}} = \mathsf{rez}$”
folgt: $\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$.

Beweis **315-13** `b)`
Aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$" und
aus **96-4** "rez Menge"
folgt: $\uparrow(-1)$ Menge.

`c)`

`1:` Aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$" und
aus **96-1** "rez Funktion"
folgt: $\uparrow(-1)$ Funktion.

`2:` Aus `1` "$\uparrow(-1)$ Funktion"
folgt via **18-18(Def)**: $\uparrow(-1)$ Relation.

`d)` Aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$" und
aus **96-1** "rez Funktion"
folgt: $\uparrow(-1)$ Funktion.

`e)`
Aus **96-1** "$\mathsf{dom}\,\mathsf{rez} = \mathbb{A}$" und
aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$"
folgt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow(-1)) = \mathbb{A}$.

`f)`
Aus **315-12** "$\mathsf{ran}\,\mathsf{rez} = \{\mathsf{nan}, \mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}, \mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$" und
aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$"
folgt: $\mathsf{ran}\,(\uparrow(-1)) = \{\mathsf{nan}, \mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}, \mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{C}$.

`g)`
Aus **AAII** "$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$"
folgt: $\uparrow(-1) : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`h)`

`1:` Via **123-6** gilt: $\mathsf{rez}(x) = 1 : x$.

`2:` Aus `1` und
aus `a)` "$\uparrow(-1) = \mathsf{rez}$"
folgt: $(\uparrow(-1))(x) = 1 : x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $x\uparrow(-1) = 1 : x$.

$\square$

Arithmetik: $(f.\square.g)(q) = f(q)\_\square\_g(q)$ für Funktionen f, g und Algebra $\square$ und beliebige q.
$\mathsf{i} \cdot (x \cdot y) = (\mathsf{i} \cdot x) \cdot y = x \cdot (\mathsf{i} \cdot y)$.
Aus “ $x \cdot x = y \cdot y$” folgt nicht unbedingt $(x = y) \vee (x = -y)$” .
$x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$. $pE_{\mathtt{in}}x$. $x\ _{\mathtt{ni}}Ep$.
<u>RECH-**Notation**</u>, Fortsetzung:
$x\ _{\mathtt{ni}}+_{\mathtt{in}}\, y$. $p+_{\mathtt{in}}x$. $x\ _{\mathtt{ni}}+p$.
$x\ _{\mathtt{ni}}\cdot_{\mathtt{in}}\, y$. $p\cdot_{\mathtt{in}}x$. $x\ _{\mathtt{ni}}\cdot p$.
$x\ _{\mathtt{ni}}-_{\mathtt{in}}\, y$. $p-_{\mathtt{in}}y$. $y\ _{\mathtt{ni}}-p$.
$x\ _{\mathtt{ni}}:_{\mathtt{in}}\, y$. $p:_{\mathtt{in}}y$. $y\ _{\mathtt{ni}}:p$.
$\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{S}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{T}$.
$\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C} = \mathbb{C}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{B} = \mathbb{B}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Ersterstellung: 17/10/14 **Letzte Änderung: 21/10/14**

316-1. Ist f eine Funktion, so gilt $p \notin f^{-1}[x]$ genau dann, wenn $f(p) \notin x$.

<u>**316-1(Satz)**</u> *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow\!)$ *f Funktion.*

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $p \notin f^{-1}[x]$.

`ii)` $f(p) \notin x$.

<u>Beweis **316-1**</u>

`1:` Aus $\rightarrow\!)$ “ f Funktion ”
folgt via **18-29**: $(p \in f^{-1}[x]) \Leftrightarrow (f(p) \in x)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p \notin f^{-1}[x]) \Leftrightarrow (f(p) \notin x)$.

$\square$

316-2. Handelt es sich bei $\Box$ um eine Algebra in A und sind f, g Funktionen, so gilt stets $(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_g(q)$. Entsprechendes gilt für $(p\_\Box.f)(q)$ und $(f.\Box\_p)(q)$.

316-2(Satz)

a) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "f Funktion"*
folgt "$(p\_\Box.f)(q) = p\_\Box\_f(q)$".

b) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "f Funktion"*
folgt "$(f.\Box\_p)(q) = f(q)\_\Box\_p$".

c) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "f, g Funktion"*
folgt "$(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_g(q)$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **316-2** `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$.

`1:` Es gilt: $(q \in \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f)) \vee (q \notin \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q \in \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f)$.

Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$" und
aus `1.1.Fall` "$q \in \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f)$"
folgt via **247-8**: $(p\_\Box.f)(q) = p\_\Box\_f(q)$.

...

<u>Beweis **316-2**</u> `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $q \notin \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$q \notin \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f)$"
folgt via **17-4**: $(p\_\Box.f)(q) = \mathcal{U}$.

`3:` Es gilt: $(p \in A) \vee (p \notin A)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $p \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `3.1.Fall`"$p \in A$"
folgt via **247-3**: $\mathsf{dom}\,(p\_\Box.f) = f^{-1}[A]$.

`5:` Aus `1.2.Fall` und
aus `4`
folgt: $q \notin f^{-1}[A]$.

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots f$ Funktion" und
aus `5`"$q \notin f^{-1}[A]$"
folgt via **316-1**: $f(q) \notin A$.

`7:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `6`"$f(q) \notin A$"
folgt via **93-13**: $p\_\Box\_f(q) = \mathcal{U}$.

`8:` Aus `7` und
aus `2`
folgt: $(p\_\Box.f)(q) = p\_\Box\_f(q)$.

`3.2.Fall` $p \notin A$.

`4:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `3.2.Fall`"$p \notin A$"
folgt via **93-13**: $p\_\Box\_f(q) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `4` und
aus `2`
folgt: $(p\_\Box.f)(q) = p\_\Box\_f(q)$.

...

...

Beweis **316-2** `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $q \notin \mathsf{dom}\,(p\_\Box.f)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$(p\_\Box.f)(q) = p\_\Box\_f(q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p\_\Box.f)(q) = p\_\Box\_f(q)$.

`b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$.

`1:` Es gilt: $(q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box\_p)) \vee (q \notin \mathsf{dom}\,(f.\Box\_p))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box\_p)$.

Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$" und
aus `1.1.Fall` "$q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box\_p)$"
folgt via **247-8**: $(f.\Box\_p)(q) = f(q)\_\Box\_p$.

...

<u>Beweis **316-2**</u> `b)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $q \notin \mathsf{dom}\,(f.\square\_p)$.

2: Aus `1.2.Fall` "$q \notin \mathsf{dom}\,(f.\square\_p)$"
folgt via **17-4**: $(f.\square\_p)(q) = \mathcal{U}$.

3: Es gilt: $(p \in A) \vee (p \notin A)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $p \in \mathbb{A}$.

4: Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `3.1.Fall` "$p \in A$"
folgt via **247-3**: $\mathsf{dom}\,(f.\square\_p) = f^{-1}[A]$.

5: Aus `1.2.Fall` und
aus 4
folgt: $q \notin f^{-1}[A]$.

6: Aus `VS` gleich "$\ldots f$ Funktion" und
aus 5 "$q \notin f^{-1}[A]$"
folgt via **316-1**: $f(q) \notin A$.

7: Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus 6 "$f(q) \notin A$"
folgt via **93-13**: $f(q)\_\square\_p = \mathcal{U}$.

8: Aus 7 und
aus 2
folgt: $(f.\square\_p)(q) = f(q)\_\square\_p$.

`3.2.Fall` $p \notin A$.

4: Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `3.2.Fall` "$p \notin A$"
folgt via **93-13**: $f(q)\_\square\_p = \mathcal{U}$.

5: Aus 4 und
aus 2
folgt: $(f.\square\_p)(q) = f(q)\_\square\_p$.

...

...

Beweis **316-2** `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f \text{ Funktion})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $q \notin \mathsf{dom}\,(f.\Box\_p)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(f.\Box\_p)(q) = f(q)\_\Box\_p$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(f.\Box\_p)(q) = f(q)\_\Box\_p$.

`c)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion})$.

`1:` Es gilt: $(q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box.g)) \vee (q \notin \mathsf{dom}\,(f.\Box.g))$.
`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box.g)$.
Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion})$" und
aus `1.1.Fall` "$q \in \mathsf{dom}\,(f.\Box.g)$"
folgt via **247-9**: $(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_g(q)$.

...

<u>Beweis **316-2**</u> `c)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $q \notin \mathsf{dom}\,(f.\square.g)$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$q \notin \mathsf{dom}\,(f.\square.g)$"
folgt via **17-4**: $(f.\square_{\_}p)(q) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A\ldots$"
folgt via **247-2**: $\mathsf{dom}\,(f.\square.g) = f^{-1}[A] \cap g^{-1}[A]$.

`4:` Aus `1.2.Fall` und
aus `3`
folgt: $q \notin f^{-1}[A] \cap g^{-1}[A]$.

`5:` Aus `4` "$q \notin f^{-1}[A] \cap g^{-1}[A]$"
folgt via **2-3**: $(q \notin f^{-1}[A]) \vee (q \notin g^{-1}[A])$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $q \notin f^{-1}[A]$.

`6:` Aus `VS` gleich "$\ldots f \ldots$ Funktion" und
aus `5.1.Fall` "$q \notin f^{-1}[A]$"
folgt via **316-1**: $f(q) \notin A$.

`7:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A\ldots$" und
aus `6` "$f(q) \notin A$"
folgt via **93-3**: $f(q)_{\_}\square_{\_}g(q) = \mathcal{U}$.

`8:` Aus `7` und
aus `2`
folgt: $(f.\square.g)(q) = f(q)_{\_}\square_{\_}g(q)$.

...

...

Beweis **316-2** `c)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (f, g \text{ Funktion})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $q \notin \mathsf{dom}\,(f.\Box.g)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`5.2.Fall` $q \notin g^{-1}[A]$.

`6:` Aus `VS` gleich "... g Funktion" und
aus `5.2.Fall` "$q \notin g^{-1}[A]$"
folgt via **316-1**: $g(q) \notin A$.

`7:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A ..." und
aus `6` "$g(q) \notin A$"
folgt via **93-3**: $f(q)\_\Box\_g(q) = \mathcal{U}$.

`8:` Aus `7` und
aus `2`
folgt: $(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_g(q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_g(q)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(f.\Box.g)(q) = f(q)\_\Box\_g(q)$.

$\Box$

316-3. Die Multiplikation mit i scheint bislang zu kurz gekommen zu sein.

316-3(Satz)

a) *Aus* “$a, b, c, d \in \mathbb{T}$”
folgt “$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = (a \cdot c - b \cdot d) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$”.

b) *Aus* “$a, b \in \mathbb{T}$”
folgt “$\mathsf{i} \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = -b + \mathsf{i} \cdot a$” *und* “$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{i} = -b + \mathsf{i} \cdot a$”.

c) *Aus* “$a, b \in \mathbb{T}$” *folgt* “$a - b, -a + b, -a - b \in \mathbb{T}$”.

d) *Aus* “$a, b, c, d \in \mathbb{T}$”
folgt “$a \cdot d - b \cdot c \in \mathbb{T}$” *und* “$a \cdot c + b \cdot d \in \mathbb{T}$”.

e) *Aus* “$a, b, c, d \in \mathbb{T}$”
folgt $\mathsf{i} \cdot ((a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d)) = -(a \cdot d + b \cdot c) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot c - b \cdot d)$.

f) *Aus* “$a, b, c, d \in \mathbb{T}$”
folgt $(\mathsf{i} \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = -(a \cdot d + b \cdot c) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot c - b \cdot d)$.

g) *Aus* “$a, b, c, d \in \mathbb{T}$”
folgt $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (\mathsf{i} \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d)) = -(a \cdot d + b \cdot c) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot c - b \cdot d)$.

h) *Aus* “$a, b, c, d \in \mathbb{T}$” *folgt*
$\mathsf{i} \cdot ((a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d)) = (\mathsf{i} \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = (a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (\mathsf{i} \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d))$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis</u> **316-3** `a)` `VS` gleich $a, b, c, d \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a, b \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a, b \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots c, d \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d) = c$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots c, d \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d) = d$.

`2:` $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d)$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$

$$\stackrel{1.1}{=} (a \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (a \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b)) \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$

$$\stackrel{1.2}{=} (a \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - b \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (a \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - b \cdot (\mathsf{Re}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$

$$\stackrel{1.3}{=} (a \cdot c - b \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)))$$
$$+\mathsf{i} \cdot (a \cdot (\mathsf{Im}(c + \mathsf{i} \cdot d)) - b \cdot c)$$

$$\stackrel{1.4}{=} (a \cdot c - b \cdot d) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot d - b \cdot c).$$

`3:` Aus 2
folgt: $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = (a \cdot c - b \cdot d) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot d + b \cdot c)$.

`b)` `VS` gleich $a, b \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{T}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: a, b Zahl.

...

<u>Beweis **316-3**</u> `b)` `VS` gleich $a, b \in \mathbb{T}$.

...

`2.1:` Aus `1.3`"$a \ldots$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $a \cdot 0 = 0$.

`2.2:` Aus `1.3`"$a \ldots$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $a \cdot 1 = a$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots b$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $b \cdot 0 = 0$.

`2.4:` Aus `1.3`"$\ldots b$ Zahl"
folgt via **FSM**1: $b \cdot 1 = b$.

`2.5:` Aus `1.3`"$a \ldots$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $a + 0 = a$.

`3:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{T}$" und
aus $\in$**schola**"$0, 1 \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (0 + \mathsf{i} \cdot 1) = (a \cdot 0 - b \cdot 1) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot 1 + b \cdot 0).$$

`4:` $(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{i}$

$$\begin{aligned}
(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{i} &\stackrel{\textbf{96-35}}{=} (a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (0 + \mathsf{i} \cdot 1) \\
&\stackrel{3}{=} (a \cdot 0 - b \cdot 1) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot 1 + b \cdot 0) \\
&\stackrel{2.1}{=} (0 - b \cdot 1) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot 1 + b \cdot 0) \\
&\stackrel{2.2}{=} (0 - b \cdot 1) + \mathsf{i} \cdot (a + b \cdot 0) \\
&\stackrel{2.3}{=} (0 - b \cdot 1) + \mathsf{i} \cdot (a + 0) \\
&\stackrel{2.4}{=} (0 - b) + \mathsf{i} \cdot (a + 0) \\
&\stackrel{2.5}{=} (0 - b) + \mathsf{i} \cdot a \\
&\stackrel{\textbf{98-12}}{=} -b + \mathsf{i} \cdot a.
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $\boxed{(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{i} = -b + \mathsf{i} \cdot a}$

`6:` Via **KGM** gilt: $\mathsf{i} \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = (a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot \mathsf{i}$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $\boxed{\mathsf{i} \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = -b + \mathsf{i} \cdot a}$

<u>Beweis **316-3**</u> `c)` `VS` gleich $a, b \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $-a, -b \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$a \ldots \in \mathbb{T}$" und
aus `1`"$\ldots -b \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $a + (-b) \in \mathbb{T}$.

`2.2:` Aus `1`"$-a \ldots \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $\boxed{-a + b \in \mathbb{T}}$

`2.3:` Aus `1`"$-a \ldots \in \mathbb{T}$" und
aus `1`"$\ldots -b \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $-a + (-b) \in \mathbb{T}$.

`3.1:` Aus `2.1`
folgt: $\boxed{a - b \in \mathbb{T}}$

`3.2:` Aus `2.3`
folgt: $\boxed{-a - b \in \mathbb{T}}$

<u>Beweis **316-3**</u> `d)` `VS` gleich $a, b, c, d \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a, \ldots c \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $a \cdot c \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a, \ldots d \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $a \cdot d \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots b, c \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $b \cdot c \in \mathbb{T}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots b, \ldots d \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $b \cdot d \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$a \cdot d \in \mathbb{T}$" und
aus `1.3`"$b \cdot c \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\boxed{a \cdot d - b \cdot c \in \mathbb{T}}$

`2.2:` Aus `1.1`"$a \cdot c \in \mathbb{T}$" und
aus `1.4`"$b \cdot d \in \mathbb{T}$"
folgt via $+$**SZ**: $\boxed{a \cdot c + b \cdot d \in \mathbb{T}}$

<u>Beweis</u> **316-3** `efgh)` `VS` gleich $a, b, c, d \in \mathbb{T}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a, b, c, d \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = (a \cdot c - b \cdot d) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot c + b \cdot d).$$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a, b, c, d \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$a, b \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{i} \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = -b + \mathsf{i} \cdot a$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots c, d \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)` : $\mathsf{i} \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = -d + \mathsf{i} \cdot c$.

`1.5:` Aus `VS` gleich "$\ldots b, \ldots d \in \mathbb{T}$"
folgt via **117-4**: $-b, -d \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\mathsf{i} \cdot ((a \cdot c - b \cdot d) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot d + b \cdot c)) = -(a \cdot d + b \cdot c) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot c - b \cdot d).$$

`2.2:` Aus `1.5`"$-b \ldots \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$a, \ldots c, d \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(-b + \mathsf{i} \cdot a) \cdot (c + \mathsf{i} \cdot d) = ((-b) \cdot c - a \cdot d) + \mathsf{i} \cdot ((-b) \cdot d + a \cdot c).$$

`2.3:` Aus `VS` gleich "$a, b \ldots \in \mathbb{T}$",
aus `1.5`"$\ldots - d \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots c \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(a + \mathsf{i} \cdot b) \cdot (-d + \mathsf{i} \cdot c) = (a \cdot (-d) - b \cdot c) + \mathsf{i} \cdot (a \cdot c + b \cdot (-d)).$$

...

Beweis **316-3** `efgh)` `VS` gleich $a, b, c, d \in \mathbb{T}$.

...

`3.1:` $\mathsf{i}\cdot((a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) \stackrel{1.1}{=} \mathsf{i}\cdot((a\cdot c-b\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot d+b\cdot c))$
$$\stackrel{2.1}{=} -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c-b\cdot d).$$

`3.2:` $(\mathsf{i}\cdot(a+\mathsf{i}\cdot b))\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d) \stackrel{1.3}{=} (-b+\mathsf{i}\cdot a)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)$
$$\stackrel{2.2}{=} ((-b)\cdot c-a\cdot d)+\mathsf{i}\cdot((-b)\cdot d+a\cdot c)$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-b\cdot c-a\cdot d)+\mathsf{i}\cdot((-b)\cdot d+a\cdot c)$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-b\cdot c-a\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(-b\cdot d+a\cdot c)$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(b\cdot c+a\cdot d)+\mathsf{i}\cdot(-b\cdot d+a\cdot c)$$
$$\stackrel{\mathbf{FSA}}{=} -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(-b\cdot d+a\cdot c)$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c-b\cdot d).$$

`3.3:` $(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(\mathsf{i}\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) \stackrel{1.4}{=} (a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(-d+\mathsf{i}\cdot c)$
$$\stackrel{2.3}{=} (a\cdot(-d)-b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c+b\cdot(-d))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} (-a\cdot d-b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c+b\cdot(-d))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-+}{=} -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c+b\cdot(-d))$$
$$\stackrel{\mathbf{FS}-\cdot}{=} -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c+(-b\cdot d))$$
$$= -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c-b\cdot d).$$

`4.e):` Aus `3.1`
folgt: $\mathsf{i}\cdot((a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) = -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c-b\cdot d)$.

`4.f):` Aus `3.2`
folgt: $(\mathsf{i}\cdot(a+\mathsf{i}\cdot b))\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d) = -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c-b\cdot d)$.

`4.g):` Aus `3.3`
folgt: $(a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(\mathsf{i}\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) = -(a\cdot d+b\cdot c)+\mathsf{i}\cdot(a\cdot c-b\cdot d)$.

`5.h):` Aus `4.e)`,
aus `4.f)` und
aus `4.g)`
folgt:
$$\mathsf{i}\cdot((a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)) = (\mathsf{i}\cdot(a+\mathsf{i}\cdot b))\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d) = (a+\mathsf{i}\cdot b)\cdot(\mathsf{i}\cdot(c+\mathsf{i}\cdot d)).$$

□

316-4. Es gilt stets $\mathsf{i} \cdot (x \cdot y) = (\mathsf{i} \cdot x) \cdot y = x \cdot (\mathsf{i} \cdot y)$.

316-4(Satz)

a) *Aus "x Zahl" folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{T}) \wedge (x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$".*

b) $\mathsf{i} \cdot (x \cdot (y \cdot z)) = (\mathsf{i} \cdot x) \cdot (y \cdot z) = x \cdot ((\mathsf{i} \cdot y) \cdot z) = x \cdot (y \cdot (\mathsf{i} \cdot z))$.

RECH-**Notation**.

Beweis **316-4** a) VS gleich x Zahl.

1.1: Aus VS gleich "x Zahl"
folgt via **AAIV**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

1.2: Aus VS gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

1.3: Aus VS gleich "x Zahl"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$.

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.3
folgt: $x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

2.2: Aus 1.2 und
aus 1.3
folgt: $\Omega, \Phi \in \mathbb{T}$.

3: Aus 1.3"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus 2.2 und
aus 2.1
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{T}) \wedge (x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$.

Beweis **316-4** `b)`

`1.1:` $\mathsf{i}\cdot(x\cdot(y\cdot z)) \overset{\mathbf{133-2}}{=} (\mathsf{i}\cdot x)\cdot(y\cdot z).$

`1.2:` $(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(y\cdot z) \overset{\mathbf{133-2}}{=} x\cdot(\mathsf{i}\cdot(y\cdot z)) \overset{\mathbf{133-2}}{=} x\cdot((\mathsf{i}\cdot y)\cdot z).$

`1.3:` $x\cdot((\mathsf{i}\cdot y)\cdot z) \overset{\mathbf{133-2}}{=} x\cdot(y\cdot(\mathsf{i}\cdot z)).$

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{i}\cdot(x\cdot(y\cdot z)) = \ldots = (\mathsf{i}\cdot x)\cdot(y\cdot z)$",
aus `1.2`"$(\mathsf{i}\cdot x)\cdot(y\cdot z) = \ldots = x\cdot((\mathsf{i}\cdot y)\cdot z)$" und
aus `1.3`"$x\cdot((\mathsf{i}\cdot y)\cdot z) = x\cdot(y\cdot(\mathsf{i}\cdot z))$"
folgt: $\mathsf{i}\cdot(x\cdot(y\cdot z)) = (\mathsf{i}\cdot x)\cdot(y\cdot z) = x\cdot((\mathsf{i}\cdot y)\cdot z) = x\cdot(y\cdot(\mathsf{i}\cdot z)).$

$\square$

316-5. Die Arithmetik ist mitunter nicht ganz so einfach wie das Rechnen in $\mathbb{C}$ vermuten läßt.

316-5.Bemerkung

a) Die Aussage
“$(x \cdot x = y \cdot y) \Rightarrow ((x = y) \vee (x = -y))$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

b) Die Aussage
“$((x, y \text{ Zahl}) \wedge (x \cdot x = y \cdot y)) \Rightarrow ((x = y) \vee (x = -y))$”
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

RECH-**Notation**.

316-6. Gilt $x \cdot x = y \cdot y$ (und sind x, y Zahlen), so folgt nicht immer $(x = y) \vee (x = -y)$.

316-6.BEISPIEL Es gelte:

→) $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

→) $a \neq b$.

→) $x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot a$.

→) $y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot b$.

Dann folgt:

a) x, y Zahl.

b) $x \cdot x = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

c) $y \cdot y = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot (+\infty)$.

d) $x \cdot x = y \cdot y$.

e) $x \neq y$.

f) $x \neq -y$.

g) $\neg((x = y) \vee (x = -y))$.

RECH-**Notation**.

316-7. Ähnlich wie für die elementaren klassentheoretischen Operationen werden nun $x\ {}_{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y, x\ {}_{\mathtt{ni}}Ep$ und $pE_{\mathtt{in}}x$ definiert.

316-7(Definition)

1) $x\ {}_{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y = E[x \times y]$.

2) $pE_{\mathtt{in}}x = E[\{p\} \times x]$.

3) $x\ {}_{\mathtt{ni}}Ep = E[x \times \{p\}]$.

316-8. Aus $z \in x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$ folgt die Existenz von Ω, Φ mit $\Omega \in x, \Phi \in y$ und $((x,y),z) \in E$. Aus $z \in x, u \in y$ und $((z,u),v) \in E$ folgt $v \in x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$.

316-8(Satz)

a) *Aus* "$z \in x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (((\Omega, \Phi), z) \in E)$".

b) *Aus* "$z \in x$" *und* "$u \in y$" *und* "$((z,u),v) \in E$" *folgt* "$v \in x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$".

c) *Aus* "$y \in pE_{\mathtt{in}}x$"
folgt "*p Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (((p, \Omega), y) \in E)$".

d) *Aus* "$y \in x$" *und* "$((p,y),z) \in E$" *folgt* "$z \in pE_{\mathtt{in}}x$".

e) *Aus* "$y \in x\ _{\mathtt{ni}}Ep$"
folgt "*p Menge*" *und* "$\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (((\Omega, p), y) \in E)$".

f) *Aus* "$y \in x$" *und* "$((y,p),z) \in E$" *folgt* "$z \in x\ _{\mathtt{ni}}Ep$".

Beweis **316-8** a) VS gleich $z \in x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$.

1: Aus VS gleich "$z \in x\ _{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$"
folgt via **316-8(Def)**: $z \in E[x \times y]$.

2: Aus 1"$z \in E[x \times y]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in x \times y) \wedge ((\Psi, z) \in E)$.

3: Aus 2"$\ldots \Psi \in x \times y \ldots$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (\Psi = (\Omega, \Phi))$.

4: Aus 3"$\ldots \Psi = (\Omega, \Phi)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, z) = ((\Omega, \Phi), z)$.

5: Aus 4 und
aus 2"$\ldots (\Psi, z) \in E$"
folgt: $((\Omega, \Phi), z) \in E$.

6: Aus 3"$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \ldots$" und
aus 5
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (((\Omega, \Phi), z) \in E)$.

Beweis **316-8** `b)` `VS` gleich $(z \in x) \wedge (u \in y) \wedge (((z,u),v) \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(z \in x) \wedge (u \in y) \ldots$"
folgt via **6-6**: $(z,u) \in x \times y$.

`2:` Aus `1`"$(z,u) \in x \times y$" und
aus `VS` gleich "$((z,u),v) \in E$"
folgt via **8-8**: $v \in E[x \times y]$.

`3:` Aus `2`
folgt via **316-7(Def)**: $v \in x\ {}_{\mathtt{ni}}E_{\mathtt{in}}y$.

`c)` `VS` gleich $y \in pE_{\mathtt{in}}x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in pE_{\mathtt{in}}x$"
folgt via **316-7(Def)**: $y \in E[\{p\} \times x]$.

`2:` Aus `1`"$y \in E[\{p\} \times x]$"
folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in \{p\} \times x) \wedge ((\Psi, y) \in E)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in \{p\} \times x \ldots$"
folgt via **6-5**: $\exists \Phi, \Omega : (\Phi \in \{p\}) \wedge (\Omega \in x) \wedge (\Psi = (\Phi, \Omega))$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in \{p\} \ldots$"
folgt via **1-6**: $\Phi = p$ Menge.

`5.1:` Aus `4`
folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`5.2:` Aus `4`"$\Phi = p \ldots$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, \Omega) = (\Phi, \Omega)$.

`6:` Aus `5.2` und
aus `3`"$\ldots \Psi = (\Phi, \Omega)$"
folgt: $\Psi = (p, \Omega)$.

`7:` Aus `6`"$\Psi = (p, \Omega)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, y) = ((p, \Omega), y)$.

`8:` Aus `7` und
aus `2`"$\ldots (\Psi, y) \in E$"
folgt: $((p, \Omega), y) \in E$.

...

<u>Beweis **316-8**</u> `c)` `VS` gleich $y \in pE_{\mathtt{in}}x$.

...

`9:` Aus `3`"$\exists \ldots \Omega \ldots$", aus `3`"$\ldots \Omega \in x \ldots$" und aus `8` folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (((p, \Omega), y) \in E)}$

`d)` `VS` gleich $(y \in x) \wedge (((p, y), z) \in E)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots ((p, y), z) \in E$" folgt via **9-15**: (p, y) Menge.

`2:` Aus `1`"(p, y) Menge" folgt via **PaarAxiom I**: p Menge.

`3:` Aus `2`"p Menge" folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`4:` Aus `3`"$p \in \{p\}$" und aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" folgt via **6-6**: $(p, y) \in \{p\} \times x$.

`5:` Aus `4`"$(p, y) \in \{p\} \times x$" und aus `VS` gleich "$\ldots ((p, y), z) \in E$" folgt via **8-8**: $z \in E[\{p\} \times x$.

`6:` Aus `5` folgt via **316-7(Def)**: $z \in pE_{\mathtt{in}}x$.

`e)` `VS` gleich $y \in x\ {}_{\mathtt{ni}}Ep$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \in x\ {}_{\mathtt{ni}}Ep$" folgt via **316-7(Def)**: $y \in E[x \times \{p\}]$.

`2:` Aus `1`"$y \in E[x \times \{p\}]$" folgt via **8-7**: $\exists \Psi : (\Psi \in x \times \{p\}) \wedge ((\Psi, y) \in E)$.

`3:` Aus `2`"$\ldots \Psi \in x \times \{p\} \ldots$" folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in \{p\}) \wedge (\Psi = (\Omega, \Phi))$.

`4:` Aus `3`"$\ldots \Phi \in \{p\} \ldots$" folgt via **1-6**: $\Phi = p$ Menge.

...

<u>Beweis **316-8**</u> `e)` `VS` gleich $y \in x\ _{\mathtt{ni}}Ep$.

...

`5.1:` Aus `4`

folgt: $\boxed{p \text{ Menge}}$

`5.2:` Aus `4`“$\Phi = p \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, p) = (\Omega, \Phi)$.

`6:` Aus `5.2` und
aus `3`“$\ldots \Psi = (\Omega, \Phi)$”
folgt: $\Psi = (\Omega, p)$.

`7:` Aus `6`“$\Psi = (\Omega, p)$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Psi, y) = ((\Omega, p), y)$.

`8:` Aus `7` und
aus `2`“$\ldots (\Psi, y) \in E$”
folgt: $((\Omega, p), y) \in E$.

`9:` Aus `3`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `3`“$\ldots \Omega \in x \ldots$” und
aus `8`

folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (((\Omega, p), y) \in E)}$

<u>Beweis **316-8**</u> `f)` `VS` gleich $(y \in x) \wedge (((y, p), z) \in E)$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots ((y, p), z) \in E$"
folgt via **9-15**: (y, p) Menge.

`2`: Aus `1`"(y, p) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: p Menge.

`3`: Aus `2`"p Menge"
folgt via **1-3**: $p \in \{p\}$.

`4`: Aus `VS` gleich "$y \in x \ldots$" und
aus `3`"$p \in \{p\}$"
folgt via **6-6**: $(y, p) \in x \times \{p\}$.

`5`: Aus `4`"$(y, p) \in x \times \{p\}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots ((y, p), z) \in E$"
folgt via **8-8**: $z \in E[x \times \{p\}]$.

`6`: Aus `5`
folgt via **316-7(Def)**: $z \in x \,{}_{\texttt{ni}}E p$.

□

316-9. Ist $\Box$ eine Algebra in A und gilt $p, q \in A$, so gilt $((p,q), p{\_}\Box{\_}q) \in \Box$.

316-9(Satz)

Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$p, q \in A$"
folgt "$((p,q), p{\_}\Box{\_}q), ((q,p), q{\_}\Box{\_}p) \in \Box$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **316-9** `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (p, q \in A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus "$p{\_}\Box{\_}q = p{\_}\Box{\_}q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in A$"

folgt via **306-11**: $\boxed{((p,q), p{\_}\Box{\_}q) \in \Box}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus "$q{\_}\Box{\_}p = q{\_}\Box{\_}p$",
aus `VS` gleich "$\ldots q \in A$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \ldots \in A$"

folgt via **306-11**: $\boxed{((q,p), q{\_}\Box{\_}p) \in \Box}$

$\Box$

316-10. Ist $E = \Box$ =Algebra in A, so vereinfacht sich Einiges in **316-8**.

316-10(Satz)

a) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$z \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\Box_{\mathtt{in}} y$"
folgt "$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (\Omega, \Phi \in A) \wedge (z = \Omega\_\Box\_\Phi)$".*

b) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$z \in x$" und "$u \in y$" und "$z, u \in A$"
folgt "$z\_\Box\_u \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\Box_{\mathtt{in}} y$".*

c) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$y \in p\Box_{\mathtt{in}} x$"
folgt "$p \in A$" und "$\exists \Omega : (\Omega \in x, A) \wedge (y = p\_\Box\_\Omega)$".*

d) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$y \in x$" und "$p, y \in A$"
folgt "$p\_\Box\_y \in p\Box_{\mathtt{in}} x$".*

e) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$y \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\Box p$"
folgt "$p \in A$" und "$\exists \Omega : (\Omega \in x, A) \wedge (y = \Omega\_\Box\_p)$".*

f) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$y \in x$" und "$p, y \in A$"
folgt "$y\_\Box\_p \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\Box p$".*

ALG-**Notation**.

Beweis **316-10** a) VS gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (z \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\Box_{\mathtt{in}} y)$.

1: Aus VS gleich "$\ldots z \in x\ {}_{\mathtt{ni}}\Box_{\mathtt{in}} y$"
folgt via **316-8**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (((\Omega, \Phi), z) \in \Box)$.

2: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus 1"$\ldots ((\Omega, \Phi), z) \in \Box$"
folgt via **306-11**: $(z = \Omega\_\Box\_\Phi) \wedge (\Omega, \Phi \in A)$.

3: Aus 1"$\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \ldots$",
aus 2"$\ldots \Omega, \Phi \in A$" und
aus 2"$z = \Omega\_\Box\_\Phi$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega \in x) \wedge (\Phi \in y) \wedge (\Omega, \Phi \in A) \wedge (z = \Omega\_\Box\_\Phi)$.

<u>Beweis **316-10**</u> `b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (z \in x) \wedge (u \in y) \wedge (z, u \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z, u \in A$"
folgt via **316-9**: $((z, u), z\_\Box\_u) \in \Box$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots (z \in x) \wedge (u \in y) \ldots$" und
aus `1`"$((z, u), z\_\Box\_u) \in \Box$"
folgt via **316-8**: $z\_\Box\_u \in x \,_{\mathtt{ni}}\Box_{\mathtt{in}} y$.

`c)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (y \in p\Box_{\mathtt{in}} x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in p\Box_{\mathtt{in}} x$"
folgt via **316-8**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (((p, \Omega), y) \in \Box)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1`"$\ldots ((p, \Omega), y) \in \Box$"
folgt via **306-11**: $(y = p\_\Box\_\Omega) \wedge (p, \Omega \in A)$.

`3.1:` Aus `2`

folgt: $\boxed{p \in A}$

`3.2:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in x \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \in A$" und
aus `2`"$y = p\_\Box\_\Omega \ldots$"

folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in x, A) \wedge (y = p\_\Box\_\Omega)}$

`d)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (y \in x) \wedge (p, y \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p, y \in A$"
folgt via **316-9**: $((p, y), p\_\Box\_y) \in \Box$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in x \ldots$" und
aus `1`"$((p, y), p\_\Box\_y) \in \Box$"
folgt via **316-8**: $p\_\Box\_y \in p\Box_{\mathtt{in}} x$.

<u>Beweis **316-10**</u> `e)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (y \in x\ _{\mathtt{ni}}\Box p)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in x\ _{\mathtt{ni}}\Box p$"
folgt via **316-8**: $\exists \Omega : (\Omega \in x) \wedge (((\Omega, p), y) \in \Box)$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1`"$\ldots ((\Omega), p, y) \in \Box$"
folgt via **306-11**: $(y = \Omega\_\Box\_p) \wedge (\Omega, p \in A)$.

`3.1:` Aus `2`
folgt: $\boxed{p \in A}$

`3.2:` Aus `1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in x \ldots$",
aus `2`"$\ldots \Omega \ldots \in A$" und
aus `2`"$y = \Omega\_\Box\_p \ldots$"
folgt: $\boxed{\exists \Omega : (\Omega \in x, A) \wedge (y = \Omega\_\Box\_p)}$

`f)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (y \in x) \wedge (p, y \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots p, y \in A$"
folgt via **316-9**: $((y, p), y\_\Box\_p) \in \Box$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in x \ldots$" und
aus `1`"$((y, p), y\_\Box\_p) \in \Box$"
folgt via **316-8**: $y\_\Box\_p \in x\ _{\mathtt{ni}}\Box p$.

$\Box$

RECH-Notation. Fortsetzung. In Weiterführung der **RECH-Notation** wird unter anderem der notationelle Umgang mit $x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{A}_{\mathtt{in}}y, x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{M}_{\mathtt{in}}y, x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{S}_{\mathtt{in}}y, x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{D}_{\mathtt{in}}y$ geregelt.

RECH-Notation (Fortsetzung)

1) $x\ _{\mathtt{ni}}+_{\mathtt{in}}\ y = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{A}_{\mathtt{in}}y$.

2) $p+_{\mathtt{in}}x = p\mathsf{A}_{\mathtt{in}}x$.

3) $x\ _{\mathtt{ni}}+p = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{A}p$.

4) $x\ _{\mathtt{ni}}\cdot_{\mathtt{in}}\ y = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{M}_{\mathtt{in}}y$.

5) $p\cdot_{\mathtt{in}}x = p\mathsf{M}_{\mathtt{in}}x$.

6) $x\ _{\mathtt{ni}}\cdot p = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{M}p$.

7) $x\ _{\mathtt{ni}}-_{\mathtt{in}}\ y = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{S}_{\mathtt{in}}y$.

8) $p-_{\mathtt{in}}x = p\mathsf{S}_{\mathtt{in}}x$.

9) $x\ _{\mathtt{ni}}-p = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{S}p$.

10) $x\ _{\mathtt{ni}}:_{\mathtt{in}}\ y = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{D}_{\mathtt{in}}y$.

11) $p:_{\mathtt{in}}x = p\mathsf{D}_{\mathtt{in}}x$.

12) $x\ _{\mathtt{ni}}:p = x\ _{\mathtt{ni}}\mathsf{D}p$.

316-11. Ist $x \in \mathbb{C}$, so gibt es $\Omega, \Phi \in \mathbb{R}$ mit $x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$. Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so gilt $a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{C}$. Ähnliches gilt für $\mathbb{B}$ an Stelle von $\mathbb{C}$.

316-11(Satz)

a) *Aus* “$x \in \mathbb{C}$” *folgt* “$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$”.

b) *Aus* “$a, b \in \mathbb{R}$” *folgt* “$a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{C}$”.

c) *Aus* “$x \in \mathbb{B}$” *folgt* “$\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{S}) \wedge (x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$”.

d) *Aus* “$a, b \in \mathbb{S}$” *folgt* “$a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{B}$”.

RECH-**Notation**.

Beweis **316-11** a) VS gleich $x \in \mathbb{C}$.

1.1: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

1.2: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{C}$”
folgt via **101-1**: $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus VS gleich “$x \in \mathbb{C}$”
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$.

2.1: Aus 1.1 “x Zahl”
folgt via **AAIV**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

2.2: Aus 1.2 und
aus 1.3 “$\ldots (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$”
folgt: $\Omega, \Phi \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2.1 und
aus 1.3 “$\ldots (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$”
folgt: $x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

4: Aus 1.3 “$\exists \Omega, \Phi \ldots$”,
aus 2.2 “$\Omega, \Phi \in \mathbb{R}$” und
aus 3 “$x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$”
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$.

<u>Beweis **316-11**</u> `b)` `VS` gleich $a, b \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt: $a, b \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$a, b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $(\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a) \wedge (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b)$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b), \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b), \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \in \mathbb{R}$"
folgt via **101-1**: $a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{C}$.

`c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{B}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt via **101-3**: $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x \in \mathbb{S}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{B}$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$.

`2.1:` Aus `1.1`"x Zahl"
folgt via **AAIV**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`2.2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`"$\ldots (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$"
folgt: $\Omega, \Phi \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `1.3`"$\ldots (\Omega = \mathsf{Re}x) \wedge (\Phi = \mathsf{Im}x)$"
folgt: $x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`4:` Aus `1.3`"$\exists \Omega, \Phi \ldots$",
aus `2.2`"$\Omega, \Phi \in \mathbb{S}$" und
aus `3`"$x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$"
folgt: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{S}) \wedge (x = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$.

<u>Beweis **316-11**</u> `d)` `VS` gleich $a, b \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a, b \in \mathbb{S}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt: $a, b \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$a, b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $(\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a) \wedge (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b)$.

`3:` Aus `2` und
aus `VS`
folgt: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b), \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`"$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b), \mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \in \mathbb{S}$"
folgt via **101-3**: $a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{B}$.

$\square$

316-12. Die Mengen $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{S}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{T}$ könnten von einigem Interesse sein. Es gilt $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C} = \mathbb{C}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{B} = \mathbb{B}$, $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

316-12(Satz)

a) *Aus* “$p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$” *folgt* “$\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (p = \mathsf{i}\cdot\Omega)$”.

b) *Aus* “$p \in \mathbb{R}$” *folgt* “$\mathsf{i}\cdot p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$”.

c) *Aus* “$p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{S}$” *folgt* “$\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{S}) \wedge (p = \mathsf{i}\cdot\Omega)$”.

d) *Aus* “$p \in \mathbb{S}$” *folgt* “$\mathsf{i}\cdot p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{S}$”.

e) *Aus* “$p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{T}$” *folgt* “$\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{T}) \wedge (p = \mathsf{i}\cdot\Omega)$”.

f) *Aus* “$p \in \mathbb{T}$” *folgt* “$\mathsf{i}\cdot p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{T}$”.

g) $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C} = \mathbb{C}$.

h) $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{B} = \mathbb{B}$.

i) $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **316-12** a) VS gleich $p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$.

Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus VS gleich “$p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$”
folgt via **316-10**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (p = \mathsf{i}\cdot\Omega)$.

b) VS gleich $p \in \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich “$p \in \mathbb{R}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: p Zahl.

2: Aus 1“p Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $p \in \mathbb{A}$.

3: aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”,
aus VS gleich “$p \in \mathbb{R}$”,
aus **AAI**“$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$” und
aus 2“$p \in \mathbb{A}$”
folgt via **316-10**: $\mathsf{i}\cdot p \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{R}$.

<u>Beweis **316-12**</u> `c)` `VS` gleich $p \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{S}$.

Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{S}$"
folgt via **316-10**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{S}) \wedge (p = \mathsf{i} \cdot \Omega)$.

`d)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: p Zahl.

`2:` Aus `1`"p Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $p \in \mathbb{A}$.

`3:` aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$",
aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$",
aus **AAI**"$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$" und
aus 2"$p \in \mathbb{A}$"
folgt via **316-10**: $\mathsf{i} \cdot p \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{S}$.

`e)` `VS` gleich $p \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{T}$.

Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{T}$"
folgt via **316-10**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{T}) \wedge (p = \mathsf{i} \cdot \Omega)$.

`f)` `VS` gleich $p \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: p Zahl.

`2:` Aus `1`"p Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $p \in \mathbb{A}$.

`3:` aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$",
aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{T}$",
aus **AAI**"$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$" und
aus 2"$p \in \mathbb{A}$"
folgt via **316-10**: $\mathsf{i} \cdot p \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{T}$.

Beweis **316-12** g)

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{i} \cdot_{\texttt{in}} \mathbb{C}$.

2: Aus **AAII**"M Algebra in $\mathbb{A}$" und
aus $\texttt{VS}$ gleich "$\alpha \in \mathsf{i} \cdot_{\texttt{in}} \mathbb{C}$"
folgt via **316-10**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{C}) \wedge (\alpha = \mathsf{i} \cdot \Omega)$.

3: Aus **101-5**"$\mathsf{i} \in \mathbb{C}$" und
aus 2"$\ldots \Omega \in \mathbb{C} \ldots$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $\mathsf{i} \cdot \Omega \in \mathbb{C}$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = \mathsf{i} \cdot \Omega$" und
aus 3
folgt: $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ergo $\texttt{Thema1.1}$: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{i} \cdot_{\texttt{in}} \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{C})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{"} \mathsf{i} \cdot_{\texttt{in}} \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \text{"}}$

...

Beweis **316-12** g) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{C}$.

2: Aus Thema1.2“$\alpha \in \mathbb{C}$”
folgt via **316-11**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{R}) \wedge (\alpha = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$.

3: Aus 2“$\ldots \Omega \ldots \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAV**: $-\Omega \in \mathbb{R}$.

4: Aus 2“$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus 3“$-\Omega \in \mathbb{R}$”
folgt via **316-11**: $\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{C}$.

5.1: Aus 3“$-\Omega \in \mathbb{R}$” und
aus 2“$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt: $\Phi, -\Omega \in \mathbb{T}$.

5.2: Aus 4“$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{C}$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt: $\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$.

6.1: Aus 5.1“$\Phi, -\Omega \in \mathbb{T}$”
folgt via **316-3**: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) = -(-\Omega) + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

6.2: Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”,
aus 4“$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{C}$”,
aus **AAI**“$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$” und
aus 5.2“$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$”
folgt via **316-10**: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{C}$.

7: Via **FS**$-+$ gilt: $-(-\Omega) + \mathsf{i} \cdot \Phi = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

8: Aus 7 und
aus 6.1
folgt: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

9: Aus 8 und
aus 6.2
folgt: $\Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{C}$.

...

...

Beweis **316-12** g) ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{C}$.

...

10: Aus 9 und
aus 2"... $\alpha = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C}$.

Ergo Thema1.2: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: A2 | "$\mathbb{C} \subseteq \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C}$"

2: Aus A1 gleich "$\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}$" und
aus A2 gleich "$\mathbb{C} \subseteq \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{C} = \mathbb{C}$.

Beweis **316-12** `h)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{B}$.

`2:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus `VS` gleich “$\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{B}$”
folgt via **316-10**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{B}) \wedge (\alpha = \mathsf{i}\cdot\Omega)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots\Omega \in \mathbb{B}\ldots$”
folgt via **316-11**: $\exists\Phi,\Psi : (\Phi,\Psi \in \mathbb{S}) \wedge (\Omega = \Phi + \mathsf{i}\cdot\Psi)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots\Phi,\Psi \in \mathbb{S}\ldots$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **0-4**: $\Phi,\Psi \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`“$\Phi,\Psi \in \mathbb{T}$”
folgt via **316-3**: $\mathsf{i}\cdot(\Phi + \mathsf{i}\cdot\Psi) = -\Psi + \mathsf{i}\cdot\Phi$.

`6.1:` Aus `5` und
aus `3`“$\ldots\Omega = \Phi + \mathsf{i}\cdot\Psi$”
folgt: $\mathsf{i}\cdot\Omega = -\Psi + \mathsf{i}\cdot\Phi$.

`6.2:` Aus `3`“$\ldots\Psi \in \mathbb{S}\ldots$”
folgt via **100-6**: $-\Psi \in \mathbb{S}$.

`7.1:` Aus `2`“$\ldots\alpha = \mathsf{i}\cdot\Omega$” und
aus `6.1`
folgt: $\alpha = -\Psi + \mathsf{i}\cdot\Phi$.

`7.2:` Aus `6.2`“$-\Psi \in \mathbb{S}$” und
aus `3`“$\ldots\Phi\ldots \in \mathbb{S}\ldots$”
folgt via **316-11**: $-\Psi + \mathsf{i}\cdot\Phi \in \mathbb{B}$.

`8:` Aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $\alpha \in \mathbb{B}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{B}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{B})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A1` | “$\mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$”

...

Beweis **316-12** `h)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{B}$”
folgt via **316-11**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{S}) \wedge (\alpha = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$.

`3:` Aus `2`“$\ldots \Omega \ldots \in \mathbb{S} \ldots$”
folgt via **100-6**: $-\Omega \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `2`“$\ldots \Phi \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus `3`“$-\Omega \in \mathbb{S}$”
folgt via **316-11**: $\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{B}$.

`5.1:` Aus `3`“$-\Omega \in \mathbb{S}$” und
aus `2`“$\ldots \Phi \in \mathbb{S} \ldots$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt: $\Phi, -\Omega \in \mathbb{T}$.

`5.2:` Aus `4`“$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{B}$” und
aus $\subseteq$**SZ**“$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt: $\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$.

`6.1:` Aus `5.1`“$\Phi, -\Omega \in \mathbb{T}$”
folgt via **316-3**: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) = -(-\Omega) + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`6.2:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”,
aus `4`“$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{B}$”,
aus **AAI**“$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$” und
aus `5.2`“$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$”
folgt via **316-10**: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{B}$.

`7:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(-\Omega) + \mathsf{i} \cdot \Phi = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`8:` Aus `7` und
aus `6.1`
folgt: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`9:` Aus `8` und
aus `6.2`
folgt: $\Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{B}$.

...

...

<u>Beweis **316-12**</u> `h)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathbb{B}$.

...

`10:` Aus `9` und
aus `2`"... $\alpha = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$"
folgt: $\alpha \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{B}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{B}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{B})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} \mathbb{B} \subseteq \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{B} \text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{B} \subseteq \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{B}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{B} = \mathbb{B}$.

<u>Beweis **316-12**</u> `i)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{A}$.

`2:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus `VS` gleich “$\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{A}$”
folgt via **316-10**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{A}) \wedge (\alpha = \mathsf{i}\cdot\Omega)$.

`3:` Aus 2“$\ldots\Omega \in \mathbb{A}\ldots$”
folgt via **95-4(Def)**: Ω Zahl.

`4:` Aus **95-5**“i Zahl” und
aus 3“Ω Zahl”
folgt via **96-15**: $\mathsf{i}\cdot\Omega$ Zahl.

`5:` Aus 2“$\ldots\alpha = \mathsf{i}\cdot\Omega$” und
aus 4
folgt: α Zahl.

`6:` Aus 5“α Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1}\,\big|\ \text{“}\mathsf{i}\cdot_{\texttt{in}}\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}\text{”}}$

...

Beweis **316-12** `i)` ...

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: α Zahl.

`3:` Aus `2` "α Zahl"
folgt via **316-4**: $\exists \Omega, \Phi : (\Omega, \Phi \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi)$.

`4:` Aus `3` "$\ldots \Omega \ldots \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **100-6**: $-\Omega \in \mathbb{T}$.

`5.1:` Aus `3` "$\ldots \Phi \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `4` "$-\Omega \in \mathbb{T}$"
folgt via **96-29**: $\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)$ Zahl.

`5.2:` Aus `3` "$\ldots \Phi \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `4` "$-\Omega \in \mathbb{T}$"
folgt via **316-3**: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) = -(-\Omega) + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`6:` Aus `5.1` "$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)$ Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$.

`7:` Aus **AAII** "M Algebra in $\mathbb{A}$",
aus `6` "$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$",
aus **AAI** "$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$" und
aus `6` "$\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega) \in \mathbb{A}$"
folgt via **316-10**: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{A}$.

`8:` Via **FS**$-+$ gilt: $-(-\Omega) + \mathsf{i} \cdot \Phi = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`9:` Aus `8` und
aus `5.2`
folgt: $\mathsf{i} \cdot (\Phi + \mathsf{i} \cdot (-\Omega)) = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$.

`10:` Aus `9` und
aus `7`
folgt: $\Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi \in \mathsf{i} \cdot_{\mathtt{in}} \mathbb{A}$.

...

...

<u>Beweis **316-12**</u> `i)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \mathbb{C}$.
...	
`11:` Aus `10` und aus `3` "... $\alpha = \Omega + \mathsf{i} \cdot \Phi$ " folgt:	$\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{"}\mathbb{A} \subseteq \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A}\text{"}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus `A2` gleich "$\mathbb{A} \subseteq \mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{i}\cdot_{\mathtt{in}}\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

□

Analysis: $\uparrow$ 2.

Ersterstellung: 24/10/14 **Letzte Änderung: 06/11/14**

317-1. Gilt $\mathsf{dom}\, x \subseteq E$, so gilt $x[E] = \mathsf{ran}\, x$. Ähnlich einfach stellt sich $x^{-1}[E]$ im Fall $\mathsf{ran}\, x \subseteq E$ dar.

317-1(Satz)

a) *Aus* "$\mathsf{dom}\, x \subseteq E$" *folgt* "$x[E] = \mathsf{ran}\, x$".

b) *Aus* "$\mathsf{ran}\, x \subseteq E$" *folgt* "$x^{-1}[E] = \mathsf{dom}\, x$".

Beweis **317-1** a) VS gleich $\mathsf{dom}\, x \subseteq E$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{dom}\, x \subseteq E$" folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{dom}\, x = \mathsf{dom}\, x$.

2: $$x[E] \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} x[E \cap \mathsf{dom}\, x] \stackrel{\mathbf{1}}{=} x[\mathsf{dom}\, x] \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} \mathsf{ran}\, x.$$

4: Aus 2 folgt: $x[E] = \mathsf{ran}\, x$.

b) VS gleich $\mathsf{ran}\, x \subseteq E$.

1: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{ran}\, x \subseteq E$" folgt via **2-10**: $E \cap \mathsf{ran}\, x = \mathsf{ran}\, x$.

2: $$x^{-1}[E] \stackrel{\mathbf{11-19}}{=} x^{-1}[E \cap \mathsf{ran}\, x] \stackrel{\mathbf{1}}{=} x^{-1}[\mathsf{ran}\, x] \stackrel{\mathbf{11-19}}{=} \mathsf{dom}\, x.$$

3: Aus 2 folgt: $x^{-1}[E] = \mathsf{dom}\, x$.

$\square$

317-2. Ist $\square$ eine Algebra in A und gilt $p \in A$ und $\mathsf{ran}\, x \subseteq A$, so folgt $\mathsf{dom}\,(p\_\square.x) = \mathsf{dom}\,(x.\square\_p) = \mathsf{dom}\, x$.

317-2(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $\square$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) $p \in A$.

$\rightarrow$) $\mathsf{ran}\, x \subseteq A$.

Dann folgt:

a) $\mathsf{dom}\,(p\_\square.x) = \mathsf{dom}\, x$.

b) $\mathsf{dom}\,(x.\square\_p) = \mathsf{dom}\, x$.

Beweis **317-2** a)

1: Aus $\rightarrow$) "$\square$ Algebra in A" und
aus $\rightarrow$) "$p \in A$"
folgt via **247-3**: $\mathsf{dom}\,(p\_\square.x) = x^{-1}[A]$.

2: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{ran}\, x \subseteq A$"
folgt via **317-1**: $x^{-1}[A] = \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(p\_\square.x) = \mathsf{dom}\, x$.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "$\square$ Algebra in A" und
aus $\rightarrow$) "$p \in A$"
folgt via **247-3**: $\mathsf{dom}\,(x.\square\_p) = x^{-1}[A]$.

2: Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{ran}\, x \subseteq A$"
folgt via **317-1**: $x^{-1}[A] = \mathsf{dom}\, x$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $\mathsf{dom}\,(x.\square\_p) = \mathsf{dom}\, x$.

$\square$

317-3. Ist $\Box$ ist eine Algebra in A und gilt $\mathsf{ran}\, x \subseteq A$, so gilt unter anderem $\mathsf{dom}\,(x.\Box.x) = \mathsf{dom}\, x$.

317-3(Satz)

a) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\mathsf{ran}\, x \subseteq A$"*
folgt "$\mathsf{dom}\,(x.\Box.y) = y^{-1}[A] \cap \mathsf{dom}\, x$"
und "$\mathsf{dom}\,(y.\Box.x) = y^{-1}[A] \cap \mathsf{dom}\, x$".

b) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\mathsf{ran}\, x, \mathsf{ran}\, y \subseteq A$"*
folgt "$\mathsf{dom}\,(x.\Box.y) = (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$".

c) *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$\mathsf{ran}\, x \subseteq A$"*
folgt "$\mathsf{dom}\,(x.\Box.x) = \mathsf{dom}\, x$".

Beweis **317-3** a) VS gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (\mathsf{ran}\, x \subseteq A)$.

1.1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **247-2**: $\mathsf{dom}\,(x.\Box.y) = x^{-1}[A] \cap y^{-1}[A]$.

1.2: Aus VS gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, x \subseteq A$"
folgt via **317-1**: $x^{-1}[A] = \mathsf{dom}\, x$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathsf{dom}\,(x.\Box.y) = (\mathsf{dom}\, x) \cap y^{-1}[A]$.

3: Via **KG**$\cap$ gilt: $(\mathsf{dom}\, x) \cap y^{-1}[A] = y^{-1}[A] \cap \mathsf{dom}\, x$.

4: Aus 2 und
aus 3
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(x.\Box.y) = y^{-1} \cap \mathsf{dom}\, x}$

5: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **247-2**: $\mathsf{dom}\,(y.\Box.x) = \mathsf{dom}\,(x.\Box.y)$.

6: Aus 4 und
aus 3
folgt: $\boxed{\mathsf{dom}\,(y.\Box.x) = y^{-1}[A] \cap \mathsf{dom}\, x}$

<u>Beweis</u> **317-3** `b)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\mathsf{ran}\, x, \mathsf{ran}\, y \subseteq A)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, y \subseteq A$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\mathsf{dom}\,(x.\square.y) = x^{-1}[A] \cap \mathsf{dom}\, y$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, x \ldots \subseteq A$"
folgt via **317-1**: $x^{-1}[A] = \mathsf{dom}\, x$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(x.\square.y) = (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, y)$.

`c)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra in } A) \wedge (\mathsf{ran}\, x \subseteq A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra in $A \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, x \subseteq A$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, x \subseteq A$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\mathsf{dom}\,(x.\square.x) = (\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x)$.

`2:` Via **2-14** gilt: $(\mathsf{dom}\, x) \cap (\mathsf{dom}\, x) = \mathsf{dom}\, x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\mathsf{dom}\,(x.\square.x) = \mathsf{dom}\, x$.

$\square$

317-4. Die Bestimmung von $\mathsf{ran}\,(\uparrow 2)$ erscheint zum gegenwärtigen Zeitpunkt kaum möglich. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - d) - c) - f) - e) - b) - g) - h)`.

317-4(Satz)

a) $\uparrow 2 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

b) $\uparrow 2$ *Menge.*

c) $\uparrow 2$ *Relation.*

d) $\uparrow 2$ *Funktion.*

e) $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$.

f) $\mathsf{ran}\,(\uparrow 2) \subseteq \mathbb{A}$.

g) $\uparrow 2 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

h) $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-4** `a)`

`1.1:` Aus $\in$**schola**“$1 \in \mathbb{N}$”
folgt via **315-1(RekParDef)**: $\uparrow (1+1) = \uparrow 1 \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`1.2:` Via $+$**schola** gilt: $1+1=2$.

`2:` Aus `1.1` und
aus **315-8**“$\uparrow 1 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$”
folgt: $\uparrow (1+1) = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2`
folgt: $\uparrow 2 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

<u>Beweis</u> **317-4** `cd)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 2 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \cdot\!\!\cdot\!\!\cdot\, \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`1.2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion.

`2:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”,
aus `1.2`“$\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion” und
aus `1.2`“$\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion”
folgt via **247-11**: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}} \cdot\!\!\cdot\!\!\cdot\, \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion.

`3.d):` Aus `2` und
aus `1.1`
folgt: $\uparrow 2$ Funktion.

`4.c):` Aus `3.d)`“$\uparrow 2$ Funktion”
folgt via **18-18(Def)**: $\uparrow 2$ Relation.

`f)`

`1:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **247-2**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}} \cdot\!\!\cdot\!\!\cdot\, \mathsf{id}_{\mathbb{A}}) \subseteq \mathbb{A}$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 2 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \cdot\!\!\cdot\!\!\cdot\, \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $\mathsf{ran}\,(\uparrow 2) \subseteq \mathbb{A}$.

<u>Beweis **317-4**</u> `e)`

`1:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$”
folgt via **0-6**: $\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) \subseteq \mathbb{A}$.

`3:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus `2`“$\mathsf{ran}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **317-3**: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}} \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}})$.

`4:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_{\mathbb{A}} \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}) = \mathbb{A}$.

`6:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\uparrow 2 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \mathbin{.\cdot.} \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`7:` Aus `5` und
aus `6`
folgt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$.

`b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\uparrow 2$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2` und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$ Menge.

`3:` Aus `1.1`“$\uparrow 2$ Funktion” und
aus `2`“$\mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$ Menge”
folgt via **26-3**: $\uparrow 2$ Menge.

`g)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $\uparrow 2$ Funktion.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$.

`1.3:` Via des bereits bewiesenen `f)` gilt: $\mathsf{ran}\,(\uparrow 2) \subseteq \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.1`“$\uparrow 2$ Funktion”,
aus `1.2`“$\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$” und
aus `1.3`“$\mathsf{ran}\,(\uparrow 2) \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\uparrow 2 : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

Beweis **317-4** `h)`

`1:` Via des bereits bewisenen `a)` gilt: $\uparrow 2 = \mathsf{id}_{\mathbb{A}} \therefore \mathsf{id}_{\mathbb{A}}$.

`2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion.

`3:` Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”,
aus 2“$\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion” und
aus 2“$\mathsf{id}_{\mathbb{A}}$ Funktion”
folgt via **316-2**: $(\mathsf{id}_{\mathbb{A}} \therefore \mathsf{id}\_A)(x) = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) \cdot \mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x)$.

`4:` Aus `3` und
aus `1`
folgt: $(\uparrow 2)(x) = \mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) \cdot \mathsf{id}_{A}(x)$.

`5:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $x \in \mathbb{A}$.

`6:` Aus `5.1`“$x \in \mathbb{A}$”
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_{\mathbb{A}}(x) = x$.

`7:` Aus `6` und
aus `4`
folgt: $(\uparrow 2)(x) = x \cdot x$.

`5.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`6.1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt: $\mathsf{dom}\,(\uparrow 2) = \mathbb{A}$.

`6.2:` Aus `5.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot x = \mathcal{U}$.

`7:` Aus `5.2.Fall` und
aus `6.1`
folgt: $x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$.

`8:` Aus `7`“$x \notin \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)$”
folgt via **17-4**: $(\uparrow 2)(x) = \mathcal{U}$.

`9:` Aus `8` und
aus `6.2`
folgt: $(\uparrow 2)(x) = x \cdot x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\uparrow 2)(x) = x \cdot x$.

Konsequenz: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

□

317-5. Injektivität auf E ist für Funktionen f besonders griffig zu beschreiben.

<u>**317-5(Satz)**</u> *Unter der Voraussetzung …*

$\rightarrow$) f *Funktion.*

… sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *äquivalent:*

`i)` f *injektiv auf* E.

`ii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

`iii)` $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta))$.

<u>Beweis **317-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich f injektiv auf E.

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $(\alpha, \beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))$

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha, \beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f \ldots$"
folgt via **2-2**: $(\alpha, \beta \in E) \wedge (\alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f)$.

`3:` Aus $\rightarrow$) "f Funktion" und
aus `2` "$\ldots \alpha, \beta \in \mathsf{dom}\, f$"
folgt via **18-22**: $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta)) \in f$.

`4:` Aus `Thema1` "$\ldots f(\alpha) = f(\beta)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\beta, f(\alpha)) = (\beta, f(\beta))$.

`5:` Aus `4` und
aus `3` "$\ldots (\beta, f(\beta)) \in f$"
folgt: $(\beta, f(\alpha)) \in f$.

`6:` Aus `VS` gleich "f injektiv auf E",
aus `2` "$\alpha, \beta \in E \ldots$",
aus `3` "$(\alpha, f(\alpha)) \ldots \in f$" und
aus `5` "$(\beta, f(\alpha)) \in f$"
folgt via **299-1(Def)**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta)$.

<u>Beweis **317-5**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$

`VS` gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta).$

Aus `VS`
folgt: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$

`VS` gleich $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (\alpha \neq \beta)) \Rightarrow (f(\alpha) \neq f(\beta)).$

`1:` Aus `VS`
folgt: $\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta))) \Rightarrow (\alpha = \beta).$

$\boxed{\texttt{Thema2}}$ $(\gamma,\delta \in E) \wedge ((\gamma,\epsilon),(\delta,\epsilon) \in f).$

`3.1:` Aus `Thema2`“$\ldots(\gamma,\epsilon),(\delta,\epsilon) \in f$”
folgt via **7-5**: $\gamma,\delta \in \mathsf{dom}\, f.$

`3.2:` Aus →)“f Funktion” und
aus `Thema2`“$\ldots(\gamma,\epsilon),(\delta,\epsilon) \in f$”
folgt via **18-20**: $(\epsilon = f(\gamma)) \wedge (\epsilon = f(\delta)).$

`4.1:` Aus `Thema2`“$\gamma,\delta \in E\ldots$” und
aus `3.1`“$\gamma,\delta \in \mathsf{dom}\, f$”
folgt via **2-2**: $\gamma,\delta \in E \cap \mathsf{dom}\, f.$

`4.2:` Aus `3.2`
folgt: $f(\gamma) = f(\delta).$

`5:` Aus `4.1`“$\gamma,\delta \in E \cap \mathsf{dom}\, f$”,
aus `4.2`“$f(\gamma) = f(\delta)$” und
aus `1`“$\forall\alpha,\beta : ((\alpha,\beta \in E \cap \mathsf{dom}\, f) \wedge (f(\alpha) = f(\beta)))$
$\Rightarrow (\alpha = \beta)$”
folgt: $\gamma = \delta.$

Ergo `Thema2`: $\forall\gamma,\delta,\epsilon : ((\gamma,\delta \in E) \wedge ((\gamma,\epsilon),(\delta,\epsilon) \in f)) \Rightarrow (\gamma = \delta).$

Konsequenz via **299-1(Def)**: f injektiv auf E.

□

317-6. Aus $x+y=0$ oder $x-y=0$ folgt $x=y$ oder $x=-y$.

317-6(Satz)

a) *Aus* “$(x+y=0)\vee(x-y=0)$” *folgt* “$(x=y)\vee(x=-y)$”.

b) $0\in[0|+\infty]$.

RECH-**Notation**.

Beweis **317-6**

$\leq$-**Notation**.

---

a) VS gleich $(x+y=0)\vee(x-y=0)$.

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{0.1.Fall}}$ $x+y=0$.

Aus 0.1.Fall “$x+y=0$”
folgt via **FS**$-$: $x=-y$.

$\boxed{\texttt{0.2.Fall}}$ $x-y=0$.

Aus 0.2.Fall “$x-y=0$”
folgt via **102-7**: $x=y$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $(x=y)\vee(x=-y)$.

b)

1: Via $\leq$**schola** gilt: $0\leq 0$.

2: Aus 1 “$0\leq 0$”
folgt via **142-3**: $0\in[0|+\infty]$.

□

317-7. Klassischer Weise folgt aus $x \uparrow 2 = y \uparrow 2$ die Alternative $x = y$ oder $x = -y$. Hier wird die Sachlage im Fall $x, y \in \mathbb{T}$ untersucht.

317-7(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $x, y \in \mathbb{T}$.

$\rightarrow\!)$ $x \cdot x = y \cdot y$.

Dann folgt "$(x = y) \vee (x = -y)$".

Beweis **317-7**

1: Aus $\rightarrow\!)$ "$\ldots y \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty) \vee (y = -\infty) \vee (y = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

2: Aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $y \cdot y \in \mathbb{R}$.

3.1: Aus $\rightarrow\!)$ "$x \cdot x = y \cdot y$" und
aus 2
folgt: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

3.2: Aus $\rightarrow\!)$ "$x \cdot x = y \cdot y$" und
aus 2 "$y \cdot y \in \mathbb{R}$"
folgt via **102-9**: $x \cdot x - y \cdot y = 0$.

4: Aus 3.1 "$x \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via **127-6**: $x \in \mathbb{C}$.

5: Aus $\rightarrow\!)$ "$x \ldots \in \mathbb{T}$" und
aus 4 "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{R}$.

6: Aus 5 "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **B2F**: $x \cdot x - y \cdot y = (x + y) \cdot (x - y)$.

7: Aus 6 und
aus 3.2
folgt: $(x + y) \cdot (x - y) = 0$.

8: Aus 7 "$(x + y) \cdot (x - y) = 0$"
folgt via **NTF**$\mathbb{A}$: $(x + y = 0) \vee (x - y = 0)$.

9: Aus 8 "$(x + y = 0) \vee (x - y = 0)$"
folgt via **317-6**: $(x = y) \vee (x = -y)$.

...

Beweis **317-7** ...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $y = +\infty.$

2: $y \cdot y \stackrel{\text{1.2.Fall}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty.$

3: Aus →) “$x \cdot x = y \cdot y$” und
aus 2“$y \cdot y = \ldots = +\infty$”
folgt: $x \cdot x = +\infty.$

4: Aus 3“$x \cdot x = +\infty$”
folgt via **135-8**: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

5: Aus 4 und
aus **AAVI**“$-\infty = -(+\infty)$”
folgt: $(x = +\infty) \vee (x = -(+\infty)).$

6: Aus 5 und
aus `1.2.Fall`
folgt: $(x = y) \vee (x = -y).$

`1.3.Fall` $y = -\infty.$

2: $y \cdot y \stackrel{\text{1.3.Fall}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty.$

3: Aus →) “$x \cdot x = y \cdot y$” und
aus 2“$y \cdot y = \ldots = +\infty$”
folgt: $x \cdot x = +\infty.$

4: Aus 3“$x \cdot x = +\infty$”
folgt via **135-8**: $(x = +\infty) \vee (x = -\infty).$

5: Aus 4 und
aus **AAVI**“$+\infty = -(-\infty)$”
folgt: $(x = -(-\infty)) \vee (x = -\infty).$

6: Aus 5 und
aus `1.3.Fall`
folgt: $(x = -y) \vee (x = y).$

7: Aus 6
folgt: $(x = y) \vee (x = -y).$

...

Beweis **317-7** ...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.4.Fall}}$ $y = \mathsf{nan}.$

2: $y \cdot y \stackrel{\text{1.4.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}.$

3: Aus →) "$x \cdot x = y \cdot y$" und
aus 2 "$y \cdot y = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot x = \mathsf{nan}.$

4: Aus 3 "$x \cdot x = \mathsf{nan}$" und
aus →) "$x \ldots \in \mathbb{T}$"
folgt via **135-6**: $x = \mathsf{nan}.$

5: Aus 4 und
aus `1.4.Fall`
folgt: $x = y.$

6: Aus 5
folgt: $(x = y) \vee (x = -y).$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(x = y) \vee (x = -y).$

□

317-8. $p \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$ kann auf mindesten drei Arten äquivalent dargestellt werden.

317-8(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`ii)` $(0 \le p) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`iii)` $(p = 0) \vee (0 < p) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`iv)` $(p = 0) \vee (0 < p < +\infty) \vee (p = +\infty) \vee (p = \mathsf{nan})$.

≤-Notation.

Beweis **317-8** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **94-8**: $(p = \mathsf{nan}) \vee (p \in [0|+\infty])$.

`2:` Via **142-3** gilt: $(p \in [0|+\infty]) \Leftrightarrow (0 \le p)$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(p = \mathsf{nan}) \vee (0 \le p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $(0 \le p) \vee (p = \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $(0 \le p) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $0 \le p$.

`1:` Aus `0.1.Fall` "$0 \le p$"
folgt via **41-5**: $(0 = p) \vee (0 < p)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(p = 0) \vee (0 < p)$.

`0.2.Fall` $p = \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p = 0) \vee (0 < p) \vee (p = \mathsf{nan})$.

Beweis **317-8** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $(p = 0) \vee (0 < p) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $p = 0$.

`0.2.Fall` $0 < p$.

1: Aus `0.2.Fall`“$0 < p$”
folgt via **107-9**: $p \in \mathbb{S}$.

2: Aus 1“$p \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $p \le +\infty$.

3: Aus 2“$p \le +\infty$”
folgt via **41-5**: $(p = +\infty) \vee (p < +\infty)$.

4: Aus 3
folgt: $(p < +\infty) \vee (p = +\infty)$.

5: Aus `0.2.Fall` und
aus 4
folgt: $(0 < p) \wedge (p < +\infty)) \vee (p = +\infty)$.

6: Aus 5
folgt: $(0 < p < +\infty) \vee (p = +\infty)$.

`0.3.Fall` $p = \mathsf{nan}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$(p = 0) \vee (0 < p < +\infty) \vee (p = +\infty) \vee (p = \mathsf{nan}).$$

Beweis **317-8** $\boxed{\texttt{iv) ⇒ i)}}$

`VS` gleich $(p=0)\vee(0<p<+\infty)\vee(p=+\infty)\vee(p=\mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $p=0$.

`1:` Aus `0.1.Fall`"$p=0$" und aus **317-6**"$0\in[0|+\infty]$" folgt: $p\in[0|+\infty]$.

`2:` Aus `1`"$p\in[0|+\infty]$" folgt via **2-2**: $p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`0.2.Fall` $0<p<+\infty$.

`1:` Aus `0.2.Fall`"$0<p\ldots$" folgt via **41-3**: $0\le p$.

`2:` Aus `1`"$0\le p$" folgt via **142-3**: $p\in[0|+\infty]$.

`3:` Aus `2`"$p\in[0|+\infty]$" folgt via **2-2**: $p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`0.3.Fall` $p=+\infty$.

`2:` Aus `0.3.Fall`"$p=+\infty$" und aus **297-22**"$+\infty\in[0|+\infty]$" folgt: $p\in[0|+\infty]$.

`3:` Aus `2`"$p\in[0|+\infty]$" folgt via **2-2**: $p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`0.4.Fall` $p=\mathsf{nan}$.

`2:` Aus `0.4.Fall`"$p=\mathsf{nan}$" und aus **95-10**"$\mathsf{nan}\in\{\mathsf{nan}\}$" folgt: $p\in\{\mathsf{nan}\}$.

`3:` Aus `2`"$p\in\{\mathsf{nan}\}$" folgt via **2-2**: $p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

□

317-9. Aus $p<0$ folgt $p\notin\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

317-9(Satz)

Aus "$p<0$" *folgt* "$p\notin\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$".

≤-Notation.

Beweis **317-9** `VS` gleich $p<0$.

1: Aus `VS` gleich "$p<0$"
folgt via **107-9**: $p\in\mathbb{S}$.

2: Aus 1"$p\in\mathbb{S}$"
folgt via **95-20**: $p\neq\mathsf{nan}$.

3: Es gilt: $(p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty])\vee(p\notin\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty])$.

`wfFallunterscheidung`

`3.1.Fall` $p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

4: Aus `3.1.Fall`"$p\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$"
folgt via **317-8**: $(0\le p)\vee(p=\mathsf{nan})$.

5: Aus 4 und
aus 2
folgt: $0\le p$.

6: Aus 5"$0\le p$"
folgt via **107-13**: $\neg(p<0)$.

7: Nach `VS` gilt: $p<0$.

`Ende wfFallunterscheidung` $p\notin\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

□

317-10. Aus $(x=y)\vee(x=-y)$ mit $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$ kann auf $x=y$ geschlossen werden.

317-10(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

$\rightarrow$) $(x=y)\vee(x=-y)$.

Dann folgt "$x=y$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-10**

1: Nach $\rightarrow$) gilt: $(x=y)\vee(x=-y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x=y$.

`1.2.Fall` $x=-y$.

2: Aus $\rightarrow$) "$\ldots y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$"
folgt via **317-8**: $((y=0)\vee(0<y)\vee(y=\mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y=0$.

3: Aus `2.1.Fall` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $x=-0$.

4: Aus 3 "$x=-0$" und
aus **98-15** "$-0=0$"
folgt: $x=0$.

5: Aus 4 und
aus `2.1.Fall`
folgt: $x=y$.

...

...

<u>Beweis **317-10**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = -y.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 < y.$

3: Aus `2.2.Fall`“$0 < y$” folgt via **109-16**: $-y < 0.$

4: Aus 3 und aus `1.2.Fall` folgt: $x < 0.$

5: Aus 4“$x < 0$” folgt via **317-9**: $x \notin \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

6: Nach →) gilt: $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty].$

`2.3.Fall` $y = \mathsf{nan}.$

3: $x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} -y \stackrel{\texttt{2.3.Fall}}{=} -\mathsf{nan} \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\texttt{2.3.Fall}}{=} y.$

4: Aus 3 folgt: $x = y.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x = y.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = y.$

□

317-11. Wenig überraschend gilt $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \subseteq \mathbb{T}$.

317-11(Satz)

$$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \subseteq \mathbb{T}.$$

Beweis **317-11**

1: Via **142-4** gilt: $[0| +\infty] \subseteq \mathbb{S}$.

2: Aus 1 “ $[0| +\infty] \subseteq \mathbb{S}$ ” und
aus $\subseteq$**SZ** “$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$”
folgt via **0-6**: $[0| +\infty] \subseteq \mathbb{T}$.

3: Aus **95-12** “$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$” und
aus 2 “ $[0| +\infty] \subseteq \mathbb{T}$ ”
folgt via **297-7**: $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| +\infty] \subseteq \mathbb{T}$.

□

317-12. Aussagen **317-7** und **317-10** können gefällig kombiniert werden.

<u>**317-12(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!)$ $x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

$\rightarrow\!)$ $x \uparrow 2 = y \uparrow 2$.

Dann folgt "$x = y$".

<u>Beweis **317-12**</u>

`1.1:` Aus $\rightarrow\!)$ "$x \uparrow 2 = y \uparrow 2$"
folgt via **317-4**: $x \cdot x = y \cdot y$.

`1.2:` Aus $\rightarrow\!)$ "$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus **317-11** "$\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $x, y \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.2` "$x, y \in \mathbb{T}$" und
aus `1.1` "$x \cdot x = y \cdot y$"
folgt via **317-7**: $(x = y) \vee (x = -y)$.

`3:` Aus $\rightarrow\!)$ "$x, y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `2` "$(x = y) \vee (x = -y)$"
folgt via **317-10**: $x = y$.

□

317-13. Gleichsam als Aufwärmübung werden zwei Eigenschaften von $\uparrow 2$ bewiesen.

317-13(Satz)

a) $(\uparrow 2)[\mathbb{T}] \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

b) $\uparrow 2$ *injektiv auf* $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Beweis **317-13**

$\leq$.RECH-**Notation**.

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$ $\alpha \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

2: Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion" und
aus Thema1"$\alpha \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$"
folgt via **18-28**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{T}) \wedge (\alpha = \Omega \uparrow 2)$.

3: Via **317-4** gilt: $\Omega \uparrow 2 = \Omega \cdot \Omega$.

4: Aus 2"$\ldots \alpha = \Omega \uparrow 2$" und
aus 3
folgt: $\alpha = \Omega \cdot \Omega$.

5: aus 2"$\ldots \Omega \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(\Omega \in \mathbb{S}) \vee (\Omega = \mathsf{nan})$.
$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

...

Beweis **337-13** `a)` ...

`Thema1` $\alpha \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

...

`Fallunterscheidung`

`5.1.Fall` $\Omega \in \mathbb{S}$.

`6:` Aus `5.1.Fall` "$\Omega \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \le \Omega \cdot \Omega$.

`7:` Aus `6` und
aus `4`
folgt: $0 \le \alpha$.

`8:` Aus `7` "$0 \le \alpha$"
folgt via **317-8**: $\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`5.2.Fall` $\Omega = \mathsf{nan}$.

`6:` $\Omega \cdot \Omega \stackrel{\text{5.2.Fall}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}$.

`7:` Aus `4` und
aus `6` "$\Omega \cdot \Omega = \ldots = \mathsf{nan}$"
folgt: $\alpha = \mathsf{nan}$.

`8:` Aus `7` "$\alpha = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in (\uparrow 2)[\mathbb{T}]) \Rightarrow (\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $(\uparrow 2)[\mathbb{T}] \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

<u>Beweis</u> **<u>317-13</u>** `b)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$

$(\alpha, \beta \in (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)) \wedge (\alpha \uparrow 2 = \beta \uparrow 2).$

`2:` Aus `Thema1.1`"$\alpha, \beta \in (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2) \ldots$"
folgt via **2-2**: $\alpha, \beta \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3:` Aus 2"$\alpha, \beta \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `Thema1`"$\alpha \uparrow 2 = \beta \uparrow 2$"
folgt via **317-12**: $\alpha = \beta$.

Ergo `Thema1.1`:

`A1`	"$\forall \alpha, \beta : ((\alpha, \beta \in (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)) \wedge (\alpha \uparrow 2 = \beta \uparrow 2)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$"

`1.2:` Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha, \beta :$
$((\alpha, \beta \in (\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \cap \mathsf{dom}\,(\uparrow 2)) \wedge (\alpha \uparrow 2 = \beta \uparrow 2)) \Rightarrow (\alpha = \beta)$"
folgt via **317-5**: $\uparrow 2$ injektiv auf $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

□

317-14. Einige Aussagen über $\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ und $\uparrow 2$ sind später hilfreich.

317-14(Satz)

a) $0 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

b) $+\infty \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

c) $\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

d) $0 \uparrow 2 = 0$.

e) $1 \uparrow 2 = 1$.

f) $(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$.

g) $(-\infty) \uparrow 2 = +\infty$.

h) $\mathsf{nan} \uparrow 2 = \mathsf{nan}$.

i) $(-x) \uparrow 2 = x \uparrow 2$.

Beweis **317-14**

RECH-**Notation**.

---

a)
Aus "$0 = 0$"
folgt via **317-8**: $0 \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

b)
Aus "$+\infty = +\infty$"
folgt via **317-8**: $+\infty \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

c)
Aus "$\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

d)

1: $0 \uparrow 2 \stackrel{\mathbf{317-4}}{=} 0 \cdot 0 \stackrel{\cdot\mathbf{schola}}{=} 0$.

2: Aus 1
folgt: $0 \uparrow 2 = 0$.

<u>Beweis</u> **317-14** `e)`

`1:` $$1 \uparrow 2 \stackrel{\textbf{317-4}}{=} 1 \cdot 1 \stackrel{\cdot\textbf{schola}}{=} 1.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$1 \uparrow 2 = 1.$$

`f)`

`1:` $$(+\infty) \uparrow 2 \stackrel{\textbf{317-4}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty.$$

`g)`

`1:` $$(-\infty) \uparrow 2 \stackrel{\textbf{317-4}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(-\infty) \uparrow 2 = +\infty.$$

`h)`

`1:` $$\mathsf{nan} \uparrow 2 \stackrel{\textbf{317-4}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\textbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$\mathsf{nan} \uparrow 2 = \mathsf{nan}.$$

`i)`

`1:` $$(-x) \uparrow 2 \stackrel{\textbf{317-4}}{=} (-x) \cdot (-x) \stackrel{\textbf{FS}-\cdot}{=} x \cdot x \stackrel{\textbf{317-4}}{=} x \uparrow 2.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(-x) \uparrow 2 = x \uparrow 2.$$

□

317-15. In konzeptioneller Nähe zu **317-8** sind zumindest vier äquivalente Formulierungen von $a \le x$ verfügbar.

317-15(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in [a| + \infty]$.

`ii)` $a \le x$.

`iii)` "$a \in \mathbb{S}$" *und* "$(x = a) \vee (a < x)$".

`iv)` "$a \in \mathbb{S}$" *und* "$(x = a) \vee (a < x < +\infty) \vee (x = +\infty)$".

`v)` "$a \in \mathbb{S}$" *und* "$(x = a) \vee (a < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

≤-Notation.

Beweis **317-15** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \in [a| + \infty]$.

Aus `VS` gleich "$x \in [a| + \infty]$"
folgt via **142-3**: $a \le x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $a \le x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \le x$"

folgt via **107-3**: $\boxed{a \in \mathbb{S}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$a \le x$"
folgt via **41-5**: $(a = x) \vee (a < x)$.

`2:` Aus `1.2`

folgt: $\boxed{(x = a) \vee (a < x)}$

Beweis **317-15** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge ((x = a) \vee (a < x))$.

`1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{a \in \mathbb{S}}$

`2:` Aus `VS`
folgt: $(x = a) \vee (a < x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = a$.

`2.2.Fall` $a < x$.

`3:` Aus `2.2.Fall`“$a < x$”
folgt via **107-9**: $a, x \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3`“$\ldots x \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-5**: $x \leq +\infty$.

`5:` Aus `4`“$x \leq +\infty$”
folgt via **41-5**: $(x = +\infty) \vee (x < +\infty)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(x < +\infty) \vee (x = +\infty)$.

`7:` Aus `2.2.Fall` und
aus `6`
folgt: $((a < x) \wedge (x < +\infty)) \vee (x = +\infty)$.

`8:` Aus `7`
folgt: $(a < x < +\infty) \vee (x = +\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$\boxed{(x = a) \vee (a < x < +\infty) \vee (x = +\infty)}$$

Beweis **317-5** `iv) ⇒ v)`

`VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge ((x = a) \vee (a < x < +\infty) \vee (x = +\infty)).$

`1:` Aus `VS`

folgt: $\boxed{a \in \mathbb{S}}$

`2:` Aus `VS`

folgt: $(x = a) \vee (a < x < +\infty) \vee (x = +\infty).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x = a.$

`2.2.Fall` $a < x < +\infty.$

`3:` Aus `2.2.Fall` "$a < x < +\infty$"

folgt via **107-12**: $x \in \mathbb{R}.$

`4:` Aus `2.2.Fall` "$a < x \ldots$" und

aus `3`

folgt: $a < x \in \mathbb{R}.$

`2.3.Fall` $x = +\infty.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$\boxed{(x = a) \vee (a < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)}$$

Beweis **317-15** $\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge ((x = a) \vee (a < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)).$

`1:` Aus `VS` folgt: $(x = a) \vee (a < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = a.$

`2:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{S} \dots$" folgt via **107-5**: $a \le a.$

`3:` Aus 2 und aus `1.1.Fall`"$x = a$" folgt: $a \le x.$

`4:` Aus 3"$a \le x$" folgt via **142-3**: $x \in [a| + \infty].$

`1.2.Fall` $a < x \in \mathbb{R}.$

`2:` Aus `1.2.Fall`"$a < x \dots$" folgt via **41-3**: $a \le x.$

`3:` Aus 2"$a \le x$" folgt via **142-3**: $x \in [a| + \infty].$

`1.3.Fall` $x = +\infty.$

`2:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{S} \dots$" folgt via **107-5**: $a \le +\infty.$

`3:` Aus 2 und aus `1.3.Fall` folgt: $a \le x.$

`4:` Aus 3"$a \le x$" folgt via **142-3**: $x \in [a| + \infty].$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \in [a| + \infty].$

□

317-16. Die etwas holprige Bedingung "$a \in \mathbb{S}$" von **317-15** verliert sich im Fall $a = 0$.

317-16(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \in [0| + \infty]$.

`ii)` $0 \leq x$.

`iii)` $(x = 0) \vee (0 < x)$".

`iv)` $(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty)$".

`v)` $(x = 0) \vee (0 < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

≤-Notation.

Beweis **317-16** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x \in [0| + \infty]$.
Aus `VS` gleich "$x \in [0| + \infty]$"
folgt via **317-15**: $0 \leq x$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}$ `VS` gleich $0 \leq x$.
Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **317-15**: $(x = 0) \vee (0 < x)$.

$\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (0 < x)$.
Aus ∈**schola**"$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$(x = 0) \vee (0 < x)$"
folgt via **317-15**: $(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty)$.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty)$.
Aus ∈**schola**"$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty)$"
folgt via **317-15**: $(x = 0) \vee (0 < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

$\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(x = 0) \vee (0 < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.
Aus ∈**schola**"$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$(x = 0) \vee (0 < x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$"
folgt via **317-15**: $x \in [0| + \infty]$.

□

317-17. Falls $n \in \mathbb{N}$, so gilt $(1:n) \uparrow 2 \leq 1:n$.

<u>317-17(Satz)</u>

a) *Aus* “$1 \leq x$” *folgt* “$(1:x) \uparrow 2 \leq 1:x$”.

b) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$(n=0) \vee (1 \leq n)$”.

c) *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$(1:n) \uparrow 2 \leq 1:n$”.

<u>$\leq$.RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **317-17**</u> a) VS gleich $1 \leq x$.

1: Aus VS gleich “$1 \leq x$”
folgt via **317-15**: $(x=1) \vee (1 < x \in \mathbb{R}) \vee (x=+\infty)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x=1$.

2: $(1:x) \uparrow 2 \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} (1:1) \uparrow 2 \stackrel{\text{:schola}}{=} 1 \uparrow 2 \stackrel{\text{317-14}}{=} 1$.

3: Aus 2“$(1:x) \uparrow 2 = \ldots = 1$” und
aus $\leq$**schola**“$1 \leq 1$”
folgt: $(1:x) \uparrow 2 \leq 1$.

4: $1 \stackrel{\text{:schola}}{=} 1:1 \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} 1:x$.

5: Aus 3 und
aus 4“$1 = \ldots = 1:x$”
folgt: $(1:x) \uparrow 2 \leq 1:x$.

...

Beweis **317-17** `a)` `VS` gleich $1 \leq x$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $1 < x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$1 < x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-9**: $0 < 1 : x < 1$.

`3:` Aus 2"$0 < 1 : x < 1$"
folgt via **107-12**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus 2"$\ldots 1 : x < 1$",
aus 2"$0 < 1 : x \ldots$" und
aus 3"$1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **147-1**: $(1 : x) \cdot (1 : x) < (1 : x) \cdot 1$.

`5.1:` Via **317-4** gilt: $(1 : x) \cdot (1 : x) = (1 : x) \uparrow 2$.

`5.2:` Aus 3"$1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $1 \cdot (1 : x) = 1 : x$.

`6.1:` Aus `5.1` und
aus 4
folgt: $(1 : x) \uparrow 2 < (1 : x) \cdot 1$.

`6.2:` Via **KGM** gilt: $(1 : x) \cdot 1 = 1 \cdot (1 : x)$.

`7:` Aus `6.1`,
aus `5.2` und
aus `5.2`
folgt: $(1 : x) \uparrow 2 < 1 : x$.

`8:` Aus 7"$(1 : x) \uparrow 2 < 1 : x$"
folgt via **41-3**: $(1 : x) \uparrow 2 \leq 1 : x$.

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $x = +\infty$.

`2:` $(1 : x) \uparrow 2 \overset{\text{1.3.Fall}}{=} (1 : (+\infty)) \uparrow 2 \overset{\mathbf{123-11}}{=} 0 \uparrow 2 \overset{\mathbf{317-14}}{=} 0$.

`3:` Aus 2"$(1 : x) \uparrow 2 = \ldots = 0$" und
aus $\leq$**schola**"$0 \leq 0$"
folgt: $(1 : x) \uparrow 2 \leq 0$.

`4:` $0 \overset{\mathbf{123-11}}{=} 1 : (+\infty) \overset{\text{1.3.Fall}}{=} 1 : x$.

`5:` Aus 3 und
aus 4"$0 = \ldots = 1 : x$"
folgt: $(1 : x) \uparrow 2 \leq 1 : x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt: $(1 : x) \uparrow 2 \leq 1 : x$.

Beweis **317-17** `b)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (0 < n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`1.2.Fall` $0 < n$.

Aus `1.2.Fall`“$0 < n$” und
aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **300-9**: $1 \leq n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(n = 0) \vee (1 \leq n)$.

`c)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $(n = 0) \vee (1 \leq n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`2:` $(1 : n) \uparrow 2 \overset{\text{1.1.Fall}}{=} (1 : 0) \uparrow 2 \overset{\text{:schola}}{=} 0 \uparrow 2 \overset{\text{317–14}}{=} 0$.

`3:` Aus `2`“$(1 : n) \uparrow 2 = \ldots = 0$” und
aus $\leq$**schola**“$0 \leq 0$”
folgt: $(1 : n) \uparrow 2 \leq 0$.

`4:` $1 : n \overset{\text{1.1.Fall}}{=} 1 : 0 \overset{\text{:schola}}{=} 0$.

`5:` Aus `3` und
aus `4`“$1 : n = \ldots = 0$”
folgt: $(1 : n) \uparrow 2 \leq 1 : n$.

`1.2.Fall` $1 \leq n$.

Aus `1.2.Fall`“$1 \leq n$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(1 : n) \uparrow 2 \leq 1 : n$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(1 : n) \uparrow 2 \leq 1 : n$.

$\square$

317-18. Aus $x < y$ und $z < u$ folgt $x + z < y + u$.

317-18(Satz)

a) *Aus* "$(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$" *folgt* "$x + (-\infty) = -\infty$".

b) *Aus* "$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$" *folgt* "$y + (+\infty) = +\infty$".

c) *Aus* "$x < y$" *folgt* "$x + (-\infty) = -\infty$" *und* "$y + (+\infty) = +\infty$".

d) *Aus* "$(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$" *und* "$z \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x + z < +\infty$".

e) *Aus* "$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$" *und* "$u \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-\infty < y + u$".

f) *Aus* "$x < y$" *und* "$z \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x + z < +\infty$".

g) *Aus* "$x < y$" *und* "$u \in \mathbb{R}$" *folgt* "$-\infty < y + u$".

h) *Aus* "$x < y$" *und* "$z < u$" *folgt* "$x + z < y + u$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-18** a) VS gleich $(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$.

Fallunterscheidung

0.1.Fall $x = -\infty$.

1: $x + (-\infty) \stackrel{\text{0.1.Fall}}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{\text{AAVI}}{=} -\infty$.

2: Aus 1 folgt: $x + (-\infty) = -\infty$.

0.2.Fall $x \in \mathbb{R}$.

Aus 0.2.Fall "$x \in \mathbb{R}$" folgt via **AAVI**: $x + (-\infty) = -\infty$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x + (-\infty) = -\infty$.

<u>Beweis **317-18**</u> `b)` `VS` gleich $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

Aus `0.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"

folgt via **AAVI**: $y + (+\infty) = +\infty$.

`0.2.Fall` $y = +\infty$.

`1:` $y + (+\infty) \stackrel{\text{0.2.Fall}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} +\infty$.

`2:` Aus `1` folgt: $y + (+\infty) = +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y + (+\infty) = +\infty$.

`c)` `VS` gleich $x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$" folgt via **107-9**: $(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y$" folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2.1:` Aus `1.1` "$(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$"

folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\boxed{x + (-\infty) = -\infty}$

`2.2:` Aus `1.2` "$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$"

folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $\boxed{y + (+\infty) = +\infty}$

<u>Beweis **317-18**</u> `d)` `VS` gleich $((x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + z = -\infty$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $x + z = -\infty$.

`4:` Aus `3` und
aus **107-6**"$-\infty < +\infty$"
folgt: $x + z < +\infty$.

`1.2.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $x + z \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`"$x + z \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $x + z < +\infty$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x + z < +\infty$.

<u>Beweis **317-18**</u> `e)` `VS` gleich $((y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)) \wedge (u \in \mathbb{R})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $y + u \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus 2"$y + u \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-10**: $-\infty < y + u$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + u = +\infty$.

`3:` Aus 2 und
aus `1.2.Fall`
folgt: $y + u = +\infty$.

`4:` Aus 3 und
aus **107-6**"$-\infty < +\infty$"
folgt: $-\infty < y + u$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $-\infty < y + u$.

`f)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-9**: $(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus 1"$(x = -\infty) \vee (x \in \mathbb{R})$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $x + z < +\infty$.

`g)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (u \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`2:` Aus 1"$(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots u \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $-\infty < y + u$.

<u>Beweis **317-18**</u> `h)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (z < u)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\dots z < u$"
folgt via **107-9**: $((z = -\infty) \vee (z \in \mathbb{R})) \wedge ((u \in \mathbb{R}) \vee (u = +\infty))$.

`2:` Aus `1`
folgt:

$$(z = -\infty) \wedge (u \in \mathbb{R})$$
$$\vee \quad (z = -\infty) \wedge (u = +\infty)$$
$$\vee \quad z, u \in \mathbb{R}$$
$$\vee \quad (z \in \mathbb{R}) \wedge (u = +\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(z = -\infty) \wedge (u \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \dots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x + (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x < y \dots$" und
aus `2.1.Fall` "$\dots u \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `g)`: $-\infty < y + u$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `2.1.Fall` "$z = -\infty \dots$"
folgt: $x + z = -\infty$.

`5:` Aus `4` und
aus `3.2`
folgt: $x + z < y + u$.

`2.2.Fall` $(z = -\infty) \wedge (u = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \dots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x + (-\infty) = -\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x < y \dots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $y + (+\infty) = +\infty$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `2.2.Fall` "$z = -\infty \dots$"
folgt: $x + z = -\infty$.

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `2.2.Fall` "$\dots u = +\infty$"
flgt: $y + u = +\infty$.

`5:` Aus `4.1`,
aus `4.2` und
aus **107-6** "$-\infty < +\infty$"
folgt: $x + z < y + u$.

...

<u>Beweis **317-18**</u> `h)` `VS` gleich $(x < y) \wedge (z < u)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $z, u \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots z < u$"
folgt via **41-3**: $z \leq u$.

`4:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$",
aus `3`"$z \leq u$" und
aus `2.3.Fall`"$z, u \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-6**: $x + z < y + u$.

`2.4.Fall` $(z \in \mathbb{R}) \wedge (u = +\infty)$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$" und
aus `2.4.Fall`"$z \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $x + z < +\infty$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$x < y \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $y + (+\infty) = +\infty$.

`4:` Aus `3.2` und
aus `2.4.Fall`"$\ldots u = +\infty$"
folgt: $y + u = +\infty$.

`5:` Aus `3.1` und
aus `4`
folgt: $x + z < y + u$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x + z < y + u$.

□

317-19. Wieder kommt die Bedingung "$(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$" ins Spiel.

<u>**317-19(Satz)**</u> *Die Aussagen* `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x : 2 + x : 2 = x$.

`ii)` $(x \textit{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`iii)` $(x : 2 \textit{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **317-19**</u> $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $x : 2 + x : 2 = x$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $x : 2 = \mathcal{U}$.

`3:` $x : 2 + x : 2 \stackrel{2}{=} \mathcal{U} + x : 2 \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$x : 2 + x : 2 = \ldots = \mathcal{U}$" und aus `VS` folgt: $x = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

Beweis **317-19** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` x Zahl.

Aus `0.1.Fall`"x Zahl" und
aus ∈**schola**"2 Zahl"
folgt via **96-17**: $x : 2$ Zahl.

`0.2.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x : 2 \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x : 2 \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`0.1.Fall` $x : 2$ Zahl.

`1.1:` Aus `0.1.Fall`"$x : 2$ Zahl"
folgt via **96-17**: x Zahl.

`1.2:` Aus ∈**schola**"$2 \in \mathbb{S}$"
folgt via **137-7**: $(x + x) : 2 = x : 2 + x : 2$.

`1.3:` Via **205-2** gilt: $x + x = 2 \cdot x$.

`2:` Aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt: $(2 \cdot x) : 2 = x : 2 + x : 2$.

`3:` Aus `1.1`"x Zahl"
folgt via **207-1**: $(2 \cdot x) : 2 = x$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $x = x : 2 + x : 2$.

`5:` Aus `4`
folgt: $x : 2 + x : 2 = x$.

`0.2.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`1:` $x : 2 + x : 2 \overset{\texttt{0.2.Fall}}{=} \mathcal{U} : 2 + x : 2 \overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + x : 2 \overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \overset{\texttt{0.2.Fall}}{=} x$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x : 2 + x : 2 = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x : 2 + x : 2 = x$.

□

317-20. Für die sich abzeichnenden Abschätzungsaktionen steht das ansonsten bemerkenswert voraussetzungsfreie Resultat "$(x, y < z : 2) \Rightarrow (x + y < z)$" zur Verfügung.

317-20(Satz)

Aus "$x, y < z : 2$" folgt "$x + y < z$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-20** `VS` gleich $x, y < z : 2$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \ldots < z : 2$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y < z : 2$"
folgt via **317-18**: $x + y < z : 2 + z : 2$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y < z : 2$"
folgt via **107-9**: $z : 2 \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.2`"$z : 2 \in \mathbb{S}$"
folgt via $\in$**SZ**: $z : 2$ Zahl.

`3:` Aus `2`"$z : 2$ Zahl"
folgt via **317-19**: $z : 2 + z : 2 = z$.

`4:` Aus `1.1` und
aus `3`
folgt: $x + y < z$.

□

317-21. Aus $x \in \mathbb{R}(\mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$ folgt $x \uparrow 2 \in \mathbb{R}(\mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C})$.

317-21(Satz)

a) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$x \uparrow 2 \in \mathbb{R}$".*

b) *Aus "$x \in \mathbb{S}$" folgt "$x \uparrow 2 \in \mathbb{S}$" und "$0 \leq x \uparrow 2$".*

c) *Aus "$x \in \mathbb{T}$" folgt "$x \uparrow 2 \in \mathbb{T}$".*

d) *Aus "$x \in \mathbb{C}$" folgt "$x \uparrow 2 \in \mathbb{C}$".*

$\leq$-**Notation**.

Beweis **317-21**

`RECH`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

1: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{R}$.

2: Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

3: Aus 1 und
aus 2
folgt: $x \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **317-21**</u> `b)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-8**: $0 \le x \cdot x$.

`2:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`3.1:` Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $\boxed{x \uparrow 2 \in \mathbb{S}}$

`3.2:` Aus `1.2` und
aus `2`
folgt: $\boxed{0 \le x \uparrow 2}$

`c)` `VS` gleich $x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{T}$.

`2:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x \uparrow 2 \in \mathbb{T}$.

`d)` `VS` gleich $x \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot x \in \mathbb{C}$.

`2:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $x \uparrow 2 \in \mathbb{C}$.

$\square$

317-22. $\mathcal{U}$ ist unvergleichbar.

317-22(Satz)

a) $\neg(\mathcal{U}\_M\_p)$.

b) $\neg(p\_M\_\mathcal{U})$.

Beweis **317-22** a)

1: Es gilt: $(\mathcal{U}\_M\_p) \vee (\neg(\mathcal{U}\_M\_p))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathcal{U}\_M\_p$.

2: Aus `1.1.Fall` "$\mathcal{U}\_M\_p$" folgt via **30-2**: $\mathcal{U}$ Menge.

3: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(\mathcal{U}\_M\_p)$.

b)

1: Es gilt: $(p\_M\_\mathcal{U}) \vee (\neg(p\_M\_\mathcal{U}))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p\_M\_\mathcal{U}$.

2: Aus `1.1.Fall` "$p\_M\_\mathcal{U}$" folgt via **30-2**: $\mathcal{U}$ Menge.

3: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(p\_M\_\mathcal{U})$.

□

317-23. Es gilt niemals $0 < x : 0$ oder $0 < 0 : x$ oder $0 < x \cdot 0$ oder $0 < 0 \cdot x$.

317-23(Satz)

a) $\neg(0 < x \cdot 0)$.

b) $\neg(0 < 0 \cdot x)$.

c) $\neg(x \cdot 0 < 0)$.

d) $\neg(0 \cdot x < 0)$.

e) $\neg(0 < x : 0)$.

f) $\neg(0 < 0 : x)$.

g) $\neg(x : 0 < 0)$.

h) $\neg(0 : x < 0)$.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **317-23**</u> `a)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl" folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und aus `2` folgt: $\neg(0 < x \cdot 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-16**: $x \cdot 0 = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(0 < \mathcal{U})$.

`4:` Aus `2` und aus `3` folgt: $\neg(0 < x \cdot 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(0 < x \cdot 0)$.

`b)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\neg(0 < x \cdot 0)$.

`1.2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot 0 = 0 \cdot x$.

`2:` Aus `1.1` und aus `1.2` folgt: $\neg(0 < 0 \cdot x)$.

Beweis **317-23** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(x \cdot 0 < 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot 0 = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(\mathcal{U} < 0)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\neg(x \cdot 0 < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(x \cdot 0 < 0)$.

`d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\neg(x \cdot 0 < 0)$.

`1.2:` Via **KGM** gilt: $x \cdot 0 = 0 \cdot x$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\neg(0 \cdot x < 0)$.

Beweis **317-23** `e)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl" folgt via **FSD**0: $x : 0 = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und aus `2` folgt: $\neg(0 < x : 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $x : 0 = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(0 < \mathcal{U})$.

`4:` Aus `2` und aus `3` folgt: $\neg(0 < x : 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(0 < x : 0)$.

<u>Beweis **317-23** `f)`</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **FSD**0: $0 : x = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(0 < 0 : x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $0 : x = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(0 < \mathcal{U})$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\neg(0 < 0 : x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(0 < 0 : x)$.

<u>Beweis **317-23** g)</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **FSD**0: $x : 0 = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(x : 0 < 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $x : 0 = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(\mathcal{U} < 0)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\neg(x : 0 < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(x : 0 < 0)$.

Beweis **317-23** `h)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **FSD**0: $0 : x = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(0 : x < 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-18**: $0 : x = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(\mathcal{U} < 0)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\neg(0 : x < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(0 : x < 0)$.

$\square$

317-24. Es gilt niemals $0 < x : (+\infty)$ oder $x : (+\infty) < 0$.

317-24(Satz)

a) $\neg(0 < x : (+\infty))$.

b) $\neg(0 < x : (-\infty))$.

c) $\neg(x : (+\infty) < 0)$.

d) $\neg(x : (-\infty) < 0)$.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-24** a)

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

2: Aus 1.1.Fall "x Zahl" folgt via **137-3**: $x : (+\infty) = 0$.

3: Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

4: Aus 3 und aus 2 folgt: $\neg(0 < x : (+\infty))$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2: Aus 1.2.Fall "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-18**: $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

3: Via **317-22** gilt: $\neg(0 < \mathcal{U})$.

4: Aus 2 und aus 3 folgt: $\neg(0 < x : (+\infty))$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\neg(0 < x : (+\infty))$.

Beweis **317-24** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **137-3**: $x : (-\infty) = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und aus `2` folgt: $\neg(0 < x : (-\infty))$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-18**: $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(0 < \mathcal{U})$.

`4:` Aus `2` und aus `3` folgt: $\neg(0 < x : (-\infty))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(0 < x : (-\infty))$.

<u>Beweis **317-24**</u> `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **137-3**: $x : (+\infty) = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(x : (+\infty) < 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : (+\infty) = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(\mathcal{U} < 0)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\neg(x : (+\infty) < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(x : (+\infty) < 0)$.

<u>Beweis **317-24** `d)`</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **137-3**: $x : (-\infty) = 0$.

`3:` Via **41-5** gilt: $\neg(0 < 0)$.

`4:` Aus `3` und
aus `2`
folgt: $\neg(x : (-\infty) < 0)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : (-\infty) = \mathcal{U}$.

`3:` Via **317-22** gilt: $\neg(\mathcal{U} < 0)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $\neg(x : (-\infty) < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\neg(x : (-\infty) < 0)$.

□

317-25 Es ist eine adaptierte Version von **131-1** für $x : y$ verfügbar.

317-25(Satz)

a) *Aus* "$x : y \in \mathbb{S}$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \in \mathbb{S}$".

b) *Aus* "$0 < x : y$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$x : y < 0$" *und* "$0 \neq y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \in \mathbb{S}$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-25** `a)` `VS` gleich $(x : y \in \mathbb{S}) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`1.1:` Via **136-1** gilt: $x : y = (1 : y) \cdot x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-24**: $0 \neq 1 : y \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `VS` gleich "$x : y \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt: $(1 : y) \cdot x \in \mathbb{S}$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\ldots 1 : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $1 : y \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `2.1`"$(1 : y) \cdot x \in \mathbb{S}$",
aus `1.2`"$0 \neq 1 : y \ldots$" und
aus `2.2`"$1 : y \in \mathbb{T}$"
folgt via **131-1**: $x \in \mathbb{S}$.

`b)` `VS` gleich $(0 < x : y) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x : y \ldots$"
folgt via **107-9**: $x : y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x : y \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \in \mathbb{S}$.

`c)` `VS` gleich $(x : y < 0) \wedge (0 \neq y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x : y < 0 \ldots$"
folgt via **107-9**: $x : y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`"$x : y \in \mathbb{S}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots 0 \neq y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \in \mathbb{S}$.

$\square$

317-26. Gilt $0 < x, y$, so folgt $0 < x : y$. Gilt $0 < x$, $0 \leq y$ und $0 < x : y$, so folgt $0 < x$.

317-26(Satz)

a) *Aus "$0 < x, y$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$0 < x : y$".*

b) *Aus "$0 < x : y$" und "$0 \leq y$" folgt "$0 < x, y$" und "$y \in \mathbb{R}$".*

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-26** `a)` `VS` gleich $(0 < x, y) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < \ldots y \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $0 < 1 : y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `1` "$0 < 1 : y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < x \cdot (1 : y)$.

`3:` Via **136-1** gilt: $x : y = x \cdot (1 : y)$.

`4:` Aus `2` und
aus `3`
folgt: $0 < x : y$.

`b)` `VS` gleich $(0 < x : y) \wedge (0 \leq y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 0 \leq y$"
folgt via **41-5**: $(0 = y) \vee (0 < y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 = y$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$0 = y$"
folgt: $x : y = x : 0$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 < \ldots x : y \ldots$" und
aus `2`
folgt: $0 < x : 0$.

`4:` Via **317-23** gilt: $\neg(0 < x : 0)$.

...

<u>Beweis **317-26**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x : y) \wedge (0 \leq y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 < y$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` "$0 < y$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`2.1.2.Fall` $y = +\infty$.

`3:` Aus `2.1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$0 < x : y \ldots$"
folgt: $0 < x : (+\infty)$.

`4:` Via **317-24** gilt: $\neg(0 < x : (+\infty))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$y \in \mathbb{R}$"

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x : y$" und
aus `1.2.Fall` "$0 < y$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < (x : y) \cdot y$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall` "$0 < y$"
folgt via **41-3**: $0 \neq y$.

`2.4:` Aus `A1` gleich "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$0 < x : y \ldots$",
aus `2.3` "$0 \neq y$" und
aus `A1` gleich "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-25**: $x \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3` "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

...

...

<u>Beweis **317-26**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x : y) \wedge (0 \leq y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $0 < y$.

...

`5:` Aus `4`“$x \in \mathbb{C}$”,
aus `2.3`“$0 \neq y$” und
aus `2.4`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **139-5**: $(x : y) \cdot y = x$.

`6:` Aus `5` und
aus `2.2`
folgt: $0 < x$.

`7:` Aus `6`,
aus `1.2.Fall` und
aus `A1`
folgt: $(0 < x, y) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(0 < x, y) \wedge (y \in \mathbb{R})$. □

317-27. Eine etwas durchsichtigere Version von **317-26** ist im Fall $0 < y \in \mathbb{R}$ verfügbar.

317-27(Satz) *Unter der Voraussetzung ...*

$\rightarrow$) $0 < y \in \mathbb{R}$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $0 < x : y$.

`ii)` $0 < x$.

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-27** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x : y$.

`1:` Aus $\rightarrow$) "$0 < y \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \leq y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x : y$" und
aus `1` "$0 \leq y$"
folgt via **317-26**: $0 < x$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < x$.

Aus `VS` gleich "$0 < x$",
aus $\rightarrow$) "$0 < y \ldots$" und
aus $\rightarrow$) "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-26**: $0 < x : y$.

$\square$

317-28 Prominenter Weise gilt $0 < 1, \ldots, \mathsf{ten} \in \mathbb{R}$. Damit ist **317-27** anwendbar.

317-28(Satz)

a) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 1$"*

b) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 2$"*

c) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 3$"*

d) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 4$"*

e) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 5$"*

f) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 6$"*

g) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 7$"*

h) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 8$"*

i) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : 9$"*

j) *"$0 < x$" genau dann, wenn "$0 < x : \mathsf{ten}$"*

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-28** a)
Aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-27**: $(0 < x) \Leftrightarrow (0 < x : 1)$.

b)
Aus $<$**schola**"$0 < 2$" und
aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-27**: $(0 < x) \Leftrightarrow (0 < x : 2)$.

c)
Aus $<$**schola**"$0 < 3$" und
aus $\in$**schola**"$3 \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-27**: $(0 < x) \Leftrightarrow (0 < x : 3)$.

d)
Aus $<$**schola**"$0 < 4$" und
aus $\in$**schola**"$4 \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-27**: $(0 < x) \Leftrightarrow (0 < x : 4)$.

Beweis **317-28** `e)`
Aus $<$**schola**“$0<5$” und
aus $\in$**schola**“$5\in\mathbb{R}$”
folgt via **317-27**: $(0<x)\Leftrightarrow(0<x:5)$.

`f)`
Aus $<$**schola**“$0<6$” und
aus $\in$**schola**“$6\in\mathbb{R}$”
folgt via **317-27**: $(0<x)\Leftrightarrow(0<x:6)$.

`g)`
Aus $<$**schola**“$0<7$” und
aus $\in$**schola**“$7\in\mathbb{R}$”
folgt via **317-27**: $(0<x)\Leftrightarrow(0<x:7)$.

`h)`
Aus $<$**schola**“$0<8$” und
aus $\in$**schola**“$8\in\mathbb{R}$”
folgt via **317-27**: $(0<x)\Leftrightarrow(0<x:8)$.

`i)`
Aus $<$**schola**“$0<9$” und
aus $\in$**schola**“$9\in\mathbb{R}$”
folgt via **317-27**: $(0<x)\Leftrightarrow(0<x:9)$.

`j)`
Aus $<$**schola**“$0<\mathsf{ten}$” und
aus $\in$**schola**“$\mathsf{ten}\in\mathbb{R}$”
folgt via **317-27**: $(0<x)\Leftrightarrow(0<x:\mathsf{ten})$.

$\square$

317-29. Von **148-3** ist eine "Reziproks-Version" verfügbar.

317-29(Satz)

a) *Aus* "$0 < 1 : x < y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$0 < 1 : y < x \in \mathbb{R}$".

b) *Aus* "$0 < x < 1 : y$" *folgt* "$0 < y < 1 : x \in \mathbb{R}$" *und* "$x, y \in \mathbb{R}$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-29** a) VS gleich $0 < 1 : x < y \in \mathbb{R}$.

1.1: Aus VS gleich "$0 < 1 : x < y \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-3**: $0 < 1 : y < 1 : (1 : x) \in \mathbb{R}$.

1.2: Aus VS gleich "$0 < 1 : x < y \ldots$"
folgt via **148-1**: $x \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus VS gleich "$0 < 1 : x < y \ldots$"
folgt via **107-12**: $1 : x \in \mathbb{R}$.

2: Aus VS gleich "$0 < 1 : x \ldots$" und
aus 1.3 "$1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $x \in \mathbb{R}$.

3: Aus 2 "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

4: Aus 3 "$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-1**: $1 : (1 : x) = x$.

5: Aus 1.1 und
aus 4
folgt: $0 < 1 : y < x \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **317-29**</u> `b)` `VS` gleich $0 < x < 1 : y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$0 < x < 1 : y$”
folgt via **107-12**: $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

`1.2:` Aus `VS` gleich “$0 < x < 1 : y$”
folgt via **107-8**: $0 < 1 : y$.

`2.1:` Aus `1.2`“$0 < 1 : y$”
folgt via **148-1**: $0 < 1 : y \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2`“$0 < 1 : y$”
folgt via **148-1**: $\boxed{y \in \mathbb{R}}$

`3.1:` Aus `VS` gleich “$0 < x < 1 : y$” und
aus `2`“$\ldots 1 : y \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-3**: $0 < 1 : (1 : y) < 1 : x \in \mathbb{R}$.

`3.2:` Aus `2.2`“$y \in \mathbb{R}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3.2`“$y \in \mathbb{C}$”
folgt via **141-1**: $1 : (1 : y) = y$.

`5:` Aus `3.1` und
aus `4`
folgt: $\boxed{0 < y < 1 : x \in \mathbb{R}}$

□

317-30. Da gemäß **Archimedes III** jede reelle Zahl durch eine natürliche Zahl übertroffen werden kann ist es nicht allzu verwunderlich, dass jede positive reelle Zahl durch den Reziprokwert einer natürlichen Zahl≥ 1 untertroffen werden kann.

317-30(Satz)

a) *Aus* "$0 < x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$".

b) *Aus* "$0 < x$" *folgt* "$\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-30** a) VS gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich "$0 < x \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $0 < 1 : x \in \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$\ldots 1 : x \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes III**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 : x < \Omega)$.

3.1: Aus 2"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

3.2: Aus 1"$0 < 1 : x \ldots$" und
aus 2"$\ldots 1 : x < \Omega$"
folgt via **107-8**: $0 < \Omega$.

4.1: Aus 1"$0 < 1 : x \ldots$",
aus 2"$\ldots 1 : x < \Omega$" und
aus 3.1"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-29**: $0 < 1 : \Omega < x$.

4.2: Aus 3.2"$0 < \Omega$" und
aus 2"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **300-9**: $1 \leq \Omega \in \mathbb{N}$.

5: Aus 2"$\exists\Omega \ldots$",
aus 4.2"$1 \leq \Omega \in \mathbb{N}$" und
aus 4.1"$0 < 1 : \Omega < x$"
folgt: $\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$.

Beweis **317-30** `b)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$0 < x$" und
aus `1.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus <**schola**"$0 < 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < 1)$.

`3:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $1 < +\infty$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $1 < x$.

`5:` Aus `2`"$\ldots 1 : \Omega < 1$" und
aus `4`"$1 < x$"
folgt via **107-8**: $1 : \Omega < x$.

`6:` Aus `2`"$\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \ldots$",
aus `2`"$\ldots 0 < 1 : \Omega \ldots$" und
aus `5`"$1 : \Omega < x$"
folgt: $\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$.

□

317-31. Das $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$ mit $p,q \in \mathbb{S}$ hat einige im Folgenden gut verwendbare Eigenschaften.

317-31(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $p,q \in \mathbb{S}$.

Dann folgt:

a) $(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} = p) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} = q)$.

b) $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \in \mathbb{S}$.

c) $p,q \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **317-31**

1.1: Aus $\rightarrow$)“$p,q \in \mathbb{S}$”
folgt via **191-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$.

1.2: Aus $\rightarrow$)“$p,q \in \mathbb{S}$”
folgt via **ElementAxiom**: p,q Menge.

2.1: Aus 1.1“$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$”
folgt via **38-1(Def)**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \in \{p,q\}$.

2.2: Aus 1.2“p,q Menge”
folgt via **4-9**: $p,q \in \{p,q\}$.

3.a): Aus 2“$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \in \{p,q\}$”
folgt via **4-9**: $(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} = p) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} = q)$.

3.b): Aus 1.1“$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$”
folgt via **157-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \in \mathbb{S}$.

3.c): Aus 1.1“$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$” und
aus 2.2“$p,q \in \{p,q\}$”
folgt via **38-7**: $p,q \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$.

$\square$

317-32. $\leq$ -Schranken von p, q vererben sich auf $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$.

<u>**317-32(Satz)**</u>

a) *Aus "$x \leq p$" und "$q \in \mathbb{S}$"*
folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$"
und "$x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$".

b) *Aus "$p \in \mathbb{S}$" und "$x \leq q$"*
folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$"
und "$x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$".

c) *Aus "$x \leq p, q$" folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$"*
und "$x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$".

d) *Aus "$p, q \leq x$" folgt "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$ ist $\leq$ -Maximum von $\{p,q\}$"*
und "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \leq x$".

<u>**$\leq$-Notation**</u>.

<u>Beweis **317-32**</u> a) VS gleich $(x \leq p) \wedge (q \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich "$x \leq p$"
folgt via **107-3**: $p \in \mathbb{S}$.

2.1: Aus 1"$p \in \mathbb{S}$" und
aus VS gleich "$\ldots q \in \mathbb{S}$"
folgt via **191-3**: $\boxed{\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \text{ ist } \leq \text{-Maximum von } \{p,q\}}$

2.2: Aus 1"$p \in \mathbb{S}$" und
aus VS gleich "$\ldots q \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-31**: $p \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$.

3: Aus VS gleich "$x \leq p \ldots$" und
aus 2"$p \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}$"
folgt via **107-8**: $\boxed{x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\}}$

<u>Beweis **317-32**</u> `b)` `VS` gleich $(p \in \mathbb{S}) \wedge (x \leq q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq q$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{q, p\} \text{ ist } \leq\text{\_Maximum von } \{q, p\}) \wedge (x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{q, p\}).$$

`2:` Via **4-11** gilt: $\{q, p\} = \{p, q\}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \leq\text{\_Maximum von } \{p, q\}) \wedge (x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\})$.

`c)` `VS` gleich $x \leq p, q$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq \ldots q$"
folgt via **107-3**: $q \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \leq p \ldots$" und
aus `1`"$q \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \leq\text{\_Maximum von } \{p, q\}) \wedge (x \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}).$$

<u>Beweis **317-32**</u> `d)` `VS` gleich $p, q \le x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p, q \le x$"
folgt via **107-3**: $p, q \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **191-3**: $\boxed{\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \text{ ist } \le\text{-Maximum von } \{p, q\}}$

`2.2:` Aus `1`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-31**: $(\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} = p) \vee (\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} = q)$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} = p$.
Aus `2.2.1.Fall`"$\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} = p$" und
aus `VS` gleich "$p \ldots \le x$"
folgt: $\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \le x$.

`2.2.2.Fall` $\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} = q$.
Aus `2.2.1.Fall`"$\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} = q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \le x$"
folgt: $\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \le x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{\overset{\le}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \le x}$

□

317-33. Auch “echte” $\leq$ -Schranken von p, q vererben sich auf $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$.

317-33(Satz)

a) *Aus* “$x < p$” *und* “$q \in \mathbb{S}$”
folgt “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$”
und “$x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$”.

b) *Aus* “$p \in \mathbb{S}$” *und* “$x < q$”
folgt “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$”
und “$x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$”.

c) *Aus* “$x < p, q$” *folgt* “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$”
und “$x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$”.

d) *Aus* “$p, q < x$” *folgt* “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$”
und “$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} < x$”.

$\leq$**-Notation**.

Beweis **317-33** a) VS gleich $(x < p) \wedge (q \in \mathbb{S})$.

1: Aus VS gleich “$x < p$”
folgt via **107-9**: $p \in \mathbb{S}$.

2.1: Aus 1“$p \in \mathbb{S}$” und
aus VS gleich “$\ldots q \in \mathbb{S}$”
folgt via **191-3**: $\boxed{\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \leq \text{-Maximum von } \{p, q\}}$

2.2: Aus 1“$p \in \mathbb{S}$” und
aus VS gleich “$\ldots q \in \mathbb{S}$”
folgt via **317-31**: $p \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$.

3: Aus VS gleich “$x < p \ldots$” und
aus 2“$p \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$”
folgt via **107-8**: $\boxed{x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}}$

Beweis **317-33** `b)` `VS` gleich $(p \in \mathbb{S}) \wedge (x < q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < q$" und
aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{q, p\} \text{ ist } \leq\text{-Maximum von } \{q, p\}) \wedge (x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{q, p\}).$$

`2:` Via **4-11** gilt: $\{q, p\} = \{p, q\}$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \leq\text{-Maximum von } \{p, q\}) \wedge (x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\})$.

`c)` `VS` gleich $x < p, q$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x < \ldots q$"
folgt via **107-9**: $q \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x < p \ldots$" und
aus `1`"$q \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \leq\text{-Maximum von } \{p, q\}) \wedge (x < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}).$$

<u>Beweis **317-33**</u> `d)` `VS` gleich $p, q < x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$p, q < x$"
folgt via **107-9**: $p, q \in \mathbb{S}.$

`2.1:` Aus `1`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **191-3**: $\boxed{\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \leq \text{-Maximum von } \{p, q\}}$

`2.2:` Aus `1`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-31**: $(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = p) \vee (\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = q).$

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = p.$

Aus `2.2.1.Fall`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = p$" und
aus `VS` gleich "$p \ldots < x$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} < x.$

`2.2.2.Fall` $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = q.$

Aus `2.2.1.Fall`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q < x$"
folgt: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} < x.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} < x}$

□

317-34. Sind p, q Elemente von $E \subseteq \mathbb{S}$, so ist $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ das $\leq$ -Maximum von $\{p, q\}$ und es gilt $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in E$. Die Spezialfälle $E = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ sind gelegentlich von besonderem Interesse.

317-34(Satz)

a) *Aus* "$p, q \in E \subseteq \mathbb{S}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in E$".

b) *Aus* "$p, q \in \mathbb{R}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}$".

c) *Aus* "$p, q \in \mathbb{Q}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{Q}$".

d) *Aus* "$p, q \in \mathbb{Z}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{Z}$".

e) *Aus* "$p, q \in \mathbb{N}$" *folgt* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$ *ist* $\leq$ *-Maximum von* $\{p, q\}$" *und* "$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{N}$".

<u>Beweis **317-34**</u> `a)` `VS` gleich $p, q \in E \subseteq \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p, q \in E \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots E \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $p, q \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **191-3**: $\boxed{\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \le\text{\_Maximum von } \{p, q\}}$

`2.2:` Aus `1`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-31**: $(\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = p) \vee (\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = q)$.

`Fallunterscheidung`

`2.2.1.Fall` $\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = p$.
Aus `2.2.1.Fall`"$\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = p$" und
aus `VS` gleich "$p \ldots \in E$"
folgt: $\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in E$.

`2.2.2.Fall` $\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = q$.
Aus `2.2.1.Fall`"$\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} = q$" und
aus `VS` gleich "$\ldots q \in E$"
folgt: $\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in E$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in E}$

`b)` `VS` gleich $p, q \in \mathbb{R}$.
Aus `VS` gleich "$p, q \in \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \le\text{\_Maximum von } \{p, q\}) \wedge (\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}).$$

`c)` `VS` gleich $p, q \in \mathbb{Q}$.
Aus `VS` gleich "$p, q \in \mathbb{Q}$" und
aus **198-6**"$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:

$$(\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \text{ ist } \le\text{\_Maximum von } \{p, q\}) \wedge (\overset{\le}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{Q}).$$

Beweis **317-34** `d)` `VS` gleich $p, q \in \mathbb{Z}$.
Aus `VS` gleich "$p, q \in \mathbb{Z}$" und
aus **164-4**"$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \text{ ist } \leq\text{\_Maximum von } \{p,q\}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \in \mathbb{Z}).$$
`e)` `VS` gleich $p, q \in \mathbb{N}$.
Aus `VS` gleich "$p, q \in \mathbb{N}$" und
aus **159-10**"$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$(\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \text{ ist } \leq\text{\_Maximum von } \{p,q\}) \wedge (\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p,q\} \in \mathbb{N}).$$
$\square$

317-35. Von **148-5** ist eine “$\leq$-Version” verfügbar.

317-35(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 < x \leq y \in \mathbb{R}$.

`ii)` $0 < 1 : y \leq 1 : x$.

$\leq$`.RECH`-**Notation**.

Beweis **317-35** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \leq y \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \leq y \ldots$”
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < y$.

`2:` Aus `VS` gleich “$0 < x \ldots$”,
aus `1.1.Fall`“$x < y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{R}$”
folgt via **148-5**: $0 < 1 : y < 1 : x$.

`3:` Aus 2“$\ldots 1 : y < 1 : x$”
folgt via **41-3**: $1 : y \leq 1 : x$.

`4:` Aus 2“$0 < 1 : y \ldots$” und
aus 3
folgt: $0 < 1 : y \leq 1 : x$.

...

Beweis **317-35** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 < x \le y \in \mathbb{R}$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $x = y$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt: $x \in \mathbb{R}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$x = y$"
folgt: $1 : x = 1 : y$.

`2.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-25**: $1 : y \in \mathbb{R}$.

`2.4:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `1.2.Fall`
folgt: $0 < y$.

`3.1:` Aus `2.4`"$0 < y$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **148-1**: $0 < 1 : y$.

`3.2:` Aus `2.3`"$1 : y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $1 : y \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `3.2`"$1 : y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $1 : y \le 1 : y$.

`5:` Aus `2.2` und
aus `4`
folgt: $1 : y \le 1 : x$.

`6:` Aus `3.1` und
aus `5`
folgt: $0 < 1 : y \le 1 : x$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $0 < 1 : y \le 1 : x$.

<u>Beweis **317-35**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < 1 : y \leq 1 : x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots 1 : y \leq 1 : x$"
folgt via **41-5**: $(1 : y < 1 : x) \vee (1 : y = 1 : x).$

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $1 : y < 1 : x.$

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < 1 : y \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$1 : y < 1 : x$"
folgt via **148-5**: $0 < x < y \in \mathbb{R}.$

`3:` Aus `2`"$\ldots x < y \ldots$"
folgt via **41-3**: $x \leq y.$

`4:` Aus `2`"$0 < x \ldots$",
aus `3` und
aus `2`"$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < x \leq y \in \mathbb{R}.$

...

Beweis **317-35** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $0 < 1 : y \leq 1 : x.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $1 : y = 1 : x.$

`2.1:` Aus `VS` gleich "$0 < 1 : y \dots$"
folgt via **148-1**: $0 < y \in \mathbb{R}.$

`2.2:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$0 < 1 : y \dots$"
folgt: $0 < 1 : x.$

`3.1:` Aus `2.1`"$\dots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{S}.$

`3.2:` Aus `2.1`"$\dots y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{C}.$

`3.3:` Aus `2.2`"$0 < 1 : x$"
folgt via **148-1**: $0 < x \in \mathbb{R}.$

`4.1:` Aus `3.1`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **107-5**: $y \leq y.$

`4.2:` Aus `3.3`"$\dots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{C}.$

`5:` Aus `1.2.Fall`"$1 : y = 1 : x$",
aus `3.2`"$y \in \mathbb{C}$" und
aus `4.2`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **141-3**: $y = x.$

`6:` Aus `4.1` und
aus `5`
folgt: $x \leq y.$

`7:` Aus `3.3`"$0 < x \dots$",
aus `6`"$x \leq y$" und
aus `2.1`"$\dots y \in \mathbb{R}$"
folgt: $0 < x \leq y \in \mathbb{R}.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $0 < x \leq y \in \mathbb{R}.$

□

317-36. Aus dem $\leq$ _Maximum zweier positiver reeller Zahlen kann ohne Weiteres eine positive untere Schranke der Reziprokwerte dieser Zahlen gewonnen werden.

317-36(Satz)

Aus "$0 < p, q \in \mathbb{R}$"

folgt "$0 < 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \leq 1 : p$"

und "$0 < 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \leq 1 : q$"

und "$1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\, \{p, q\} \in \mathbb{R}$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **317-36**</u> `VS` gleich $0 < p, q \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < p, q \ldots$"
folgt via **317-33**: $0 < \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-34**: $\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots p, q \in \mathbb{R}$" und
aus $\subseteq$**SZ**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $p, q \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `1.2`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}$"
folgt via **137-25**: $\boxed{1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}}$

`2.2:` Aus `1.3`"$p, q \in \mathbb{S}$"
folgt via **317-31**: $p, q \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$.

`3.1:` Aus `VS` gleich "$0 < p \ldots$",
aus `2.2`"$p \ldots \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$" und
aus `1.2`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-35**: $\boxed{0 < 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \leq 1 : p}$

`3.2:` Aus `VS` gleich "$0 < \ldots q \ldots$",
aus `2.2`"$\ldots q \leq \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\}$" und
aus `1.2`"$\overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-35**: $\boxed{0 < 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{p, q\} \leq 1 : q}$

$\square$

317-37. $\uparrow 2$ ist auf $[0|+\infty]$ streng wachsend.

317-37(Satz)

a) *Aus* “$0 < x < y$” *folgt* “$0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2$”.

b) *Aus* “$0 < x \leq y$” *folgt* “$0 < x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$”.

c) *Aus* “$0 \leq x < y$” *folgt* “$0 \leq x \uparrow 2 < y \uparrow 2$”.

d) *Aus* “$0 \leq x \leq y$” *folgt* “$0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$”.

$\leq$-**Notation**.

Beweis **317-37**

RECH-**Notation**.

---

a) VS gleich $0 < x < y$.

1.1: Aus VS gleich “$0 < x \ldots$”
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

1.2: Aus VS gleich “$0 < x \ldots$”
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

1.3: Aus VS gleich “$0 < x < y$”
folgt via **107-12**: $x \in \mathbb{R}$.

1.4: Aus VS gleich “$0 < x \ldots$” und
aus VS gleich “$\ldots x < y$”
folgt via **107-8**: $0 < y$.

...

<u>Beweis **317-37**</u> `a)` `VS` gleich $0 < x < y.$

...

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$",
aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `1.3`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **147-1**: $x \cdot x < x \cdot y.$

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x < y$" und
aus `1.4`"$0 < y$"
folgt via **147-1**: $y \cdot x \leq y \cdot y.$

`2.3:` Aus `1.1`"$0 \neq x$" und
aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < x \cdot x.$

`3:` Via **KGM** gilt: $x \cdot y = y \cdot x.$

`4:` Aus `3` und
aus `2.2`
folgt: $x \cdot y \leq y \cdot y.$

`5:` aus `2.1`"$x \cdot x < x \cdot y$" und
aus `4`"$x \cdot y \leq y \cdot y$"
folgt via **107-8**: $x \cdot x < y \cdot y.$

`6:` Aus `2.3` und
aus `5`
folgt: $0 < x \cdot x < y \cdot y.$

`7.1:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x.$

`7.2:` Via **317-4** gilt: $y \uparrow 2 = y \cdot y.$

`8:` Aus `6`,
aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

<u>Beweis **317-37**</u> `b) VS` gleich $0 < x \leq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \leq y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < y$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$x < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2$.

`3:` Aus `2`"$x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`4:` Aus `2`"$0 < x \uparrow 2 \ldots$" und
aus `3`
folgt: $0 < x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`1.2.Fall` $x = y$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`2.3:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $x \cdot x = y \cdot y$.

`3:` Aus `2.1`"$0 \neq x$" und
aus `2.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < x \cdot x$.

`4:` Aus `3`"$0 < x \cdot x$"
folgt via **107-9**: $x \cdot x \leq x \cdot x$.

`5:` Aus `4` und
aus `2.3`
folgt: $x \cdot x \leq y \cdot y$.

`6:` Aus `3` und
aus `5`
folgt: $0 < x \cdot x \leq y \cdot y$.

`7.1:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`7.2:` Via **317-4** gilt: $y \uparrow 2 = y \cdot y$.

`8:` Aus `6`,
aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $0 < x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 < x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2$.

<u>Beweis **317-37**</u> `c)` `VS` gleich $0 \le x < y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < x$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$0 < x$ und
aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2$.

`3:` Aus 2"$0 < x \uparrow 2 \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \le x \uparrow 2$.

`4:` Aus 3
aus 2"$\ldots x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt: $0 \le x \uparrow 2 < y \uparrow 2$.

...

<u>Beweis **317-37**</u> `c)` `VS` gleich $0 \le x < y.$

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.2.Fall}}$ $0 = x.$

`2.1:` Aus `1.2.Fall` und
aus `VS` gleich "$\ldots x < y$"
folgt: $0 < y.$

`2.2:` Aus $\le$**schola**"$0 \le 0$" und
aus **317-14**"$0 \uparrow 2 = 0$"
folgt: $0 \le 0 \uparrow 2.$

`2.3:` Aus **317-14**"$0 \uparrow 2 = 0$" und
aus `1.2.Fall`
folgt: $x \uparrow 2 = 0.$

`3.1:` Aus `2.1`"$0 < y$"
folgt via **41-3**: $0 \ne y.$

`3.2:` Aus `2.1`"$0 < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}.$

`4.1:` Aus `2.2` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $0 \le x \uparrow 2.$

`4.2:` Aus `3.1`"$0 \ne y$" und
aus `3.2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < y \cdot y.$

`5:` Via **317-4** gilt: $y \uparrow 2 = y \cdot y.$

`6:` Aus `5` und
aus `4.2`
folgt: $0 < y \uparrow 2.$

`7:` Aus `2.3` und
aus `6`
folgt: $x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

`8:` Aus `4.1` und
aus `7`
folgt: $0 \le x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In beiden Fällen gilt: $0 \le x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

Beweis **317-37** `d)` `VS` gleich $0 \le x \le y.$

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 \le x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x).$

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \le y$"
folgt via **41-5**: $(x < y) \vee (x = y).$

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{array}{rl} & (0 < x) \wedge (x < y) \\ \vee & (0 < x) \wedge (x = y) \\ \vee & (0 = x) \wedge (x < y) \\ \vee & (0 = x) \wedge (x = y). \end{array}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(0 < x) \wedge (x < y).$

`3:` Aus `2.1.Fall`"$(0 < x) \wedge (x < y)$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

`4:` Aus `3`"$0 < x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $0 \le x \uparrow 2 \le y \uparrow 2.$

`2.2.Fall` $(0 < x) \wedge (x = y).$

`3:` Aus `2.2.Fall`"$0 < x \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \le x.$

`4:` Aus `3` und
aus `2.2.Fall`"$\ldots x = y$"
folgt: $x \le y.$

`5:` Aus `2.2.Fall`"$0 < x \ldots$" und
aus `4`"$x \le y$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $0 < x \uparrow 2 \le y \uparrow 2.$

`6:` Aus `5`"$0 < x \uparrow 2 \le y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $0 \le x \uparrow 2 \le y \uparrow 2.$

...

<u>Beweis **317-37**</u> `d)` `VS` gleich $0 \le x \le y.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(0 = x) \wedge (x < y).$

`3:` Aus `2.3.Fall`"$\dots x < y$"
folgt via **107-9**: $x \le x.$

`4:` Aus `2.3.Fall`"$0 = x \dots$" und
aus `3`
folgt: $0 \le x.$

`5:` Aus `4`"$0 \le x$" und
aus `2.3.Fall`"$\dots x < y$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $0 \le x \uparrow 2 < y \uparrow 2.$

`6:` Aus `5`"$0 \le x \uparrow 2 < y \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $0 \le x \uparrow 2 \le y \uparrow 2.$

...

<u>Beweis **317-37**</u> `d)` `VS` gleich $0 \leq x \leq y.$

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(0 = x) \wedge (x = y).$

`3.1:` Aus $\leq$**schola**“$0 \leq 0$” und
aus $\cdot$**schola**“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $0 \leq 0 \cdot 0.$

`3.2:` Aus $\leq$**schola**“$0 \leq 0$” und
aus $\cdot$**schola**“$0 \cdot 0 = 0$”
folgt: $0 \cdot 0 \leq 0 \cdot 0.$

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `2.4.Fall`“$0 = x \ldots$”
folgt: $0 \leq x \cdot x.$

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `2.4.Fall`“$0 = x \ldots$”
folgt: $x \cdot x \leq x \cdot x.$

`5:` Aus `4.2` und
aus `2.4.Fall`“$\ldots x = y$”
folgt: $x \cdot x \leq y \cdot y.$

`6:` Aus `4.1` und
aus `5`
folgt: $0 \leq x \cdot x \leq y \cdot y.$

`7.1:` Via **317-4** gilt: $x \cdot x = x \uparrow 2.$

`7.2:` Via **317-4** gilt: $y \cdot y = y \uparrow 2.$

`8:` Aus `6`,
aus `7.1` und
aus `7.2`
folgt: $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $0 \leq x \uparrow 2 \leq y \uparrow 2.$

$\square$

317-38. Falls $0 < x \in \mathbb{R}$, so folgt aus $z < y : x$ die - erwartete - Aussage $x \cdot z < y$.

317-38(Satz)

Aus "$0 < x \in \mathbb{R}$" und "$z < y : x$" folgt "$x \cdot z < y$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-38** `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (z < y : x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots z < y : x$" und
aus `VS` gleich "$0 < x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **147-1**: $x \cdot z < x \cdot (y : x)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots z < y : x$"
folgt via **107-9**: $y : x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.4`"$y : x \in \mathbb{S}$",
aus `1.3`"$0 \neq x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **317-25**: $y \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`"$y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $y \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`"$y \in \mathbb{C}$",
aus `1.3`"$0 \neq x$" und
aus `1.2`"$x \in \mathbb{C}$"
folgt via **139-5**: $x \cdot (y : x) = y$.

`5:` Aus `1.1` und
aus `5`
folgt: $x \cdot z < y$.

□

317-39. Ist $0 < x$, so kann $\Omega \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot \Omega)$ für $\Omega \in \mathbb{R}$ kleiner als eine vorgegebene, positive Schranke gemacht werden und bleibt dabei positiv.

317-39(Satz)

a) *Aus* "$0 < x, y \in \mathbb{R}$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$".

b) *Aus* "$0 < x, y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-39** `a)` `VS` gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < \ldots y \ldots$"
folgt via **317-28**: $0 < y : 2$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$"
folgt via :**SZ**: $y : 2 \in \mathbb{R}$.

`1.3:` Aus $<$**schola**"$0 < 2$" und
aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < 2 \cdot x$.

`1.4:` Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $2 \cdot x \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$0 < y : 2$" und
aus `1.2`"$y : 2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-30**: $\exists \Phi : (1 \leq \Phi \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Phi < y : 2)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y : 2 \in \mathbb{R}$" und
aus `1.4`"$2 \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via :**SZ**: $(y : 2) : (2 \cdot x) \in \mathbb{R}$.

`2.3:` Aus `1.3`"$0 < 2 \cdot x$",
aus `1.4`"$2 \cdot x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1`"$0 < y : 2$"
folgt via **317-27**: $0 < (y : 2) : (2 \cdot x)$.

...

<u>Beweis **317-39**</u> `a)` `VS` gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

...

`3.1:` Aus `2.3`"$0 < (y : 2) : (2 \cdot x)$" und
aus `2.2`"$(y : 2) : (2 \cdot x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-30**:
$$\exists \Psi : (1 \leq \Psi \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Psi < (y : 2) : (2 \cdot x)).$$

`3.2:` Aus `2.1`"$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **317-17**: $(1 : \Phi) \uparrow 2 \leq 1 : \Phi$.

`4.1:` Aus `2.1`"$\ldots 1 \leq \Phi \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **300-9**: $0 < \Phi \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `2.1`"$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\Phi \in \mathbb{R}$.

`4.3:` Aus `3.1`"$\ldots 1 \leq \Psi \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **300-9**: $0 < \Psi \in \mathbb{N}$.

`4.4:` Aus `3.1`"$\ldots \Psi \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\Psi \in \mathbb{R}$.

`4.5:` Aus `3.2`"$(1 : \Phi) \uparrow 2 \leq 1 : \Phi$" und
aus `2.1`"$\ldots 1 : \Phi < y : 2$"
folgt via **107-8**: $(1 : \Phi) \uparrow 2 < y : 2$.

`5:` Aus `4.1`"$0 < \Phi \ldots$",
aus `4.3`"$0 < \Psi \ldots$",
aus `4.2`"$\Phi \in \mathbb{R}$" und
aus `4.4`"$\Psi \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-36**:
$$(0 < 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\} \leq 1 : \Phi, 1 : \Psi) \wedge (1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{R}).$$

`6:` Aus `2.1` und
aus `3.1`
folgt: $\exists \Omega : \Omega = 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\}$.

`7:` Aus `6`"$\ldots \Omega = 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\}$" und
aus `5`
folgt: $(0 < \Omega \leq 1 : \Phi, 1 : \Psi) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

...

Beweis **317-39** `a)` `VS` gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

...

`8.1:` Aus `7`“$0 < \Omega \leq 1 : \Phi \ldots$”
folgt via **317-37**: $0 < \Omega \uparrow 2 \leq (1 : \Phi) \uparrow 2$.

`8.2:` Aus `7`“$\ldots \Omega \leq \ldots 1 : \Psi \ldots$” und
aus `3.1`“$\ldots 1 : \Psi < (y : 2) : (2 \cdot x)$”
folgt via **107-8**: $\Omega < (y : 2) : (2 \cdot x)$.

`9.1:` Aus `8.1`“$0 < \Omega \uparrow 2 \leq (1 : \Phi) \uparrow 2$” und
aus `4.5`“$(1 : \Phi) \uparrow 2 < y : 2$”
folgt via **107-8**: $0 < \Omega \uparrow 2 < y : 2$.

`9.2:` Aus `1.3`“$0 < 2 \cdot x$”,
aus `1.4`“$2 \cdot x \in \mathbb{R}$” und
aus `8.2`“$\Omega < (y : 2) : (2 \cdot x)$”
folgt via **317-38**: $(2 \cdot x) \cdot \Omega < y : 2$.

`10:` Aus `9.1`“$\ldots \Omega \uparrow 2 < y : 2$” und
aus `9.2`“$(2 \cdot x) \cdot \Omega < y : 2$”
folgt via **317-20**: $\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$.

`11:` Aus `6`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `7`“$0 < \Omega \ldots$”,
aus `7`“$\ldots \Omega \in \mathbb{R}$” und
aus `10`“$\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$”
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$.

<u>Beweis **317-39**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x, y) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < \ldots y \ldots$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$0 < x, y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$.

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$",
aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < 1)$.

`3:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $1 < +\infty$.

`4:` Aus `2`"$\ldots \Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < 1$" und
aus `3`"$1 < +\infty$"
folgt via **107-8**: $\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < +\infty$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$.

`6:` Aus `2`"$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \ldots$" und
aus `5`"$\ldots \Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$.

□

317-40. Die Aussagen von **B2F** können mit Hilfe von $\uparrow 2$ in vertrauterer Form präsentiert werden.

317-40(Satz) (B$\uparrow$ 2F: Binomische $\uparrow$ 2-er Formeln)

a) *Aus* "$x, y \in E$" *und* "E *ist* **AD**"
folgt "$(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$".

b) *Aus* "$x, y \in \mathbb{R}$" *folgt* "$(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$"
und "$(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)$"
und "$(x+y)\cdot(x-y) = x\uparrow 2 - y\uparrow 2$".

c) *Aus* "$x, y \in \mathbb{T}$"
folgt "$(x+y)\cdot(x-y) = x\uparrow 2 - y\uparrow 2$".

d) *Aus* "$x, y \in \mathbb{C}$" *folgt* "$(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$"
und "$(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)$"
und "$(x+y)\cdot(x-y) = x\uparrow 2 - y\uparrow 2$".

e) *Aus* "$0 \leq x, y$"
folgt "$(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$".

f) *Aus* "$x, y \leq 0$"
folgt "$(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$".

g) *Aus* "$x \leq 0 \leq y$"
folgt "$(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)$".

h) *Aus* "$y \leq 0 \leq x$"
folgt "$(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **317-40**</u> `a)` `VS` gleich $(x, y \in E) \wedge (E \text{ ist } \mathbf{AD})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(x, y \in E) \wedge (E \text{ ist } \mathbf{AD})$"
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x+y)\cdot(x+y) = (x+y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`b)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via **B2F**: $(x-y)\cdot(x-y) = (x\cdot x + y\cdot y) - 2\cdot(x\cdot y)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x+y)\cdot(x+y) = (x+y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $(x-y)\cdot(x-y) = (x-y)\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.4:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

...

<u>Beweis **317-40**</u> `b)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{R}$.

...

`3.1:` Aus `1.1`,
aus `2.1`,
aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(x+y) \uparrow 2 = (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) + 2 \cdot (x \cdot y)}$

`3.2:` Aus `1.2`,
aus `2.2`,
aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(x-y) \uparrow 2 = (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) - 2 \cdot (x \cdot y)}$

`3.3:` Aus `1.3`,
aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(x+y) \cdot (x-y) = x \uparrow 2 - y \uparrow 2}$

`c)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{T}$"
folgt via **B2F**: $(x+y) \cdot (x-y) = x \cdot x - y \cdot y$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $x \cdot x = x \uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $y \cdot y = y \uparrow 2$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(x+y) \cdot (x-y) = x \uparrow 2 - y \uparrow 2$.

Beweis **317-40** `d)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **B2F**: $(x-y)\cdot(x-y) = (x\cdot x + y\cdot y) - 2\cdot(x\cdot y)$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x-y) = x\cdot x - y\cdot y$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x+y)\cdot(x+y) = (x+y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $(x-y)\cdot(x-y) = (x-y)\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.4:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

`3.1:` Aus `1.1`,
aus `2.1`,
aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)}$

`3.2:` Aus `1.2`,
aus `2.2`,
aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)}$

`3.3:` Aus `1.3`,
aus `2.3` und
aus `2.4`
folgt: $\boxed{(x+y)\cdot(x-y) = x\uparrow 2 - y\uparrow 2}$

<u>Beweis **317-40**</u> `e)` `VS` gleich $0 \le x, y$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 \le x, y$”
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x+y)\cdot(x+y) = (x+y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`f)` `VS` gleich $x, y \le 0$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x, y \le 0$”
folgt via **B2F**: $(x+y)\cdot(x+y) = (x\cdot x + y\cdot y) + 2\cdot(x\cdot y)$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x+y)\cdot(x+y) = (x+y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(x+y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) + 2\cdot(x\cdot y)$.

<u>Beweis **317-40**</u> `g)` `VS` gleich $x \leq 0 \leq y$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \leq 0 \leq y$"
folgt via **B2F**: $(x-y)\cdot(x-y) = (x\cdot x + y\cdot y) - 2\cdot(x\cdot y)$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x-y)\cdot(x-y) = (x-y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)$.

`h)` `VS` gleich $y \leq 0 \leq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$y \leq 0 \leq x$"
folgt via **B2F**: $(x-y)\cdot(x-y) = (x\cdot x + y\cdot y) - 2\cdot(x\cdot y)$.

`2.1:` Via **317-4** gilt: $(x-y)\cdot(x-y) = (x-y)\uparrow 2$.

`2.2:` Via **317-4** gilt: $x\cdot x = x\uparrow 2$.

`2.3:` Via **317-4** gilt: $y\cdot y = y\uparrow 2$.

`3:` Aus `1`,
aus `2.1`,
aus `2.2` und
aus `2.3`
folgt: $(x-y)\uparrow 2 = (x\uparrow 2 + y\uparrow 2) - 2\cdot(x\cdot y)$.

□

317-41. $\leq, <$-Aussagen mit nan auf einer Seite gibt es nicht.

317-41(Satz)

a) $\neg(\mathsf{nan} \leq x)$.

b) $\neg(\mathsf{nan} < x)$.

c) $\neg(x \leq \mathsf{nan})$.

d) $\neg(x < \mathsf{nan})$.

$\leq$-Notation.

Beweis **317-41** a)

1: Es gilt: $(\mathsf{nan} \leq x) \vee (\neg(\mathsf{nan} \leq x))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{nan} \leq x$.

1: Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{nan} \leq x$" folgt via **107-3**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{S}$.

2: Via **95-11** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(\mathsf{nan} \leq x)$.

b)

1: Es gilt: $(\mathsf{nan} < x) \vee (\neg(\mathsf{nan} < x))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{nan} < x$.

1: Aus `1.1.Fall` "$\mathsf{nan} < x$" folgt via **107-9**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{S}$.

2: Via **95-11** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(\mathsf{nan} < x)$.

<u>Beweis **317-41**</u> `c)`

`1:` Es gilt: $(x \leq \mathsf{nan}) \vee (\neg(x \leq \mathsf{nan}))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \leq \mathsf{nan}$.

`1:` Aus `1.1.Fall`“$x \leq \mathsf{nan}$”
folgt via **107-3**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{S}$.

`2:` Via **95-11** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(x \leq \mathsf{nan})$.

`d)`

`1:` Es gilt: $(x < \mathsf{nan}) \vee (\neg(x < \mathsf{nan}))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x < \mathsf{nan}$.

`1:` Aus `1.1.Fall`“$x < \mathsf{nan}$”
folgt via **107-9**: $\mathsf{nan} \in \mathbb{S}$.

`2:` Via **95-11** gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(x < \mathsf{nan})$.

$\square$

317-42. Aus $x \in \mathbb{T}$ und $x \uparrow 2 < y$ folgt $x \in \mathbb{R}$.

<u>**317-42(Satz)**</u>

a) *Aus "$0 \leq x \in \mathbb{R}$" folgt "$x \uparrow 2 < (1+x) \uparrow 2$".*

b) *Aus "$x \in \mathbb{T}$" und "$x \uparrow 2 < y$" folgt "$x \in \mathbb{R}$".*

<u>$\leq$.`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **317-42**</u> `a)` `VS` gleich $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $x < 1 + x$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$" und
aus `1` "$x < 1 + x$"
folgt via **317-37**: $x \uparrow 2 < (1+x) \uparrow 2$.

`b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \uparrow 2 < y)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty) \vee (x = -\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $x \uparrow 2 = (+\infty) \uparrow 2$.

`3:` Aus `2` und
aus **317-14** "$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$"
folgt: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`4:` Aus `3` und
aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 < y$"
folgt: $+\infty < y$.

`5:` Via **107-7** gilt: $\neg(+\infty < y)$.

...

<u>Beweis **317-42**</u> `b)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{T}) \wedge (x \uparrow 2 < y)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $x = -\infty$.

`2:` Aus `1.3.Fall`
folgt: $x \uparrow 2 = (-\infty) \uparrow 2$.

`3:` Aus 2 und
aus **317-14** "$(-\infty) \uparrow 2 = +\infty$"
folgt: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`4:` Aus 3 und
aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 < y$"
folgt: $+\infty < y$.

`5:` Via **107-7** gilt: $\neg(+\infty < y)$.

`1.4.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1.4.Fall`
folgt: $x \uparrow 2 = \mathsf{nan} \uparrow 2$.

`3:` Aus 2 und
aus **317-14** "$\mathsf{nan} \uparrow 2 = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \uparrow 2 = \mathsf{nan}$.

`4:` Aus 3 und
aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 < y$"
folgt: $\mathsf{nan} < y$.

`5:` Via **317-41** gilt: $\neg(\mathsf{nan} < y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x \in \mathbb{R}$.

$\square$

317-43. Gilt $0 < x \in \mathbb{R}$ mit $x \uparrow 2 < y$, so gibt es Ω mit $0 < x < \Omega \in \mathbb{R}$ und $x \uparrow 2 < \Omega \uparrow 2 < y$.

317-43(Satz)

Aus "$0 < x \in \mathbb{R}$" *und* "$x \uparrow 2 < y$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < x < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x \uparrow 2 < \Omega \uparrow 2 < y)$".

$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-43** `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (x \uparrow 2 < y)$.

`1.1`: Aus `VS` gleich "$\ldots x \uparrow 2 < y$"
folgt via **109-7**: $0 < y - x \uparrow 2$.

`1.2`: Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **317-21**: $x \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

`2`: Via **FS**$-+$ gilt: $y - x \uparrow 2 = -x \uparrow 2 + y$.

`3`: Aus `1.1` und
aus `2`
folgt: $0 < -x \uparrow 2 + y$.

`4`: Aus `VS` gleich "$0 < x \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$0 < -x \uparrow 2 + y$"
folgt via **317-39**: $\exists \Psi : (0 < \Psi \in \mathbb{R}) \wedge (\Psi \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Psi < -x \uparrow 2 + y)$.

`5`: Aus `4`"$\ldots \Psi \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Psi < -x \uparrow 2 + y$" und
aus `1.2`"$x \uparrow 2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **160-9**: $x \uparrow 2 + (\Psi \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Psi) < y$.

`6`: Via **FSA** gilt: $x \uparrow 2 + (\Psi \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Psi) = (x \uparrow 2 + \Psi \uparrow 2) + (2 \cdot x) \cdot \Psi$.

`7`: Aus `6` und
aus `5`
folgt: $(x \uparrow 2 + \Psi \uparrow 2) + (2 \cdot x) \cdot \Psi < y$.

...

<u>Beweis **317-43**</u> `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (x \uparrow 2 < y)$.

...

`8.1:` Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$" und
aus `4`"$\ldots \Psi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AGM**$\mathbb{R}$: $2 \cdot (x \cdot \Psi) = (2 \cdot x) \cdot \Psi$.

`8.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `4`"$\ldots \Psi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **B**$\uparrow$ 2**F**: $(x + \Psi) \uparrow 2 = (x \uparrow 2 + \Psi \uparrow 2) + 2 \cdot (x \cdot \Psi)$.

`8.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2`"$\ldots 0 < \Psi \ldots$"
folgt via **165-2**: $x < x + \Psi$.

`8.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2`"$\ldots \Psi \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via +**SZ**: $x + \Psi \in \mathbb{R}$.

`9.1:` Aus `8.1` und
aus `8.2`
folgt: $(x + \Psi) \uparrow 2 = (x \uparrow 2 + \Psi \uparrow 2) + (2 \cdot x) \cdot \Psi$.

`9.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$" und
aus `8.3`"$x < x + \Psi$"
folgt via **317-37**: $0 < x \uparrow 2 < (x + \Psi) \uparrow 2$.

`9.3:` Aus `8.4` folgt: $\exists \Omega : \Omega = x + \Psi$.

`10.1:` Aus `9.1` und
aus `7`
folgt: $(x + \Psi) \uparrow 2 < y$.

`10.2:` Aus `8.3` und
aus `9.3`"$\ldots \Omega = x + \Psi$"
folgt: $x < \Omega$.

`10.3:` Aus `8.4` und
aus `9.3`"$\ldots \Omega = x + \Psi$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`10.4:` Aus `9.2` und
aus `9.3`"$\ldots \Omega = x + \Psi$"
folgt: $0 < x \uparrow 2 < \Omega \uparrow 2$.

...

<u>Beweis **317-43**</u> `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (x \uparrow 2 < y)$.

...

`11:` Aus `10.1` und
aus `9.3`"$\ldots \Omega = x + \Psi$"
folgt: $\Omega \uparrow 2 < y$.

`12:` Aus `9.3`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$",
aus `10.2`"$x < \Omega$",
aus `10.3`"$\Omega \in \mathbb{R}$",
aus `10.4`"$\ldots x \uparrow 2 < \Omega \uparrow 2$" und
aus `11`"$\Omega \uparrow 2 < y$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < x < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x \uparrow 2 < \Omega \uparrow 2 < y)$.

$\square$

317-44. Aus $x < y$ folgen interessante Alternativen für x, y.

317-44(Satz) *Es gelte:*

$\rightarrow$) $x < y$.

Dann folgt:

a) $(x \leq 0) \vee (0 < x \in \mathbb{R})$.

b) $(\mathbb{R} \ni y < 0) \vee (0 \leq y)$.

$\leq$-**Notation**.

<u>Beweis</u> **317-44** `a)`

`1:` Aus →) “$x < y$”
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` “$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **122-3**: $(x \leq 0) \overset{\star}{\texttt{aut}} (0 < x)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \leq 0$.

`2.2.Fall` $0 < x$.

`3:` Aus →) “$x < y$”
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3.2.Fall` $x = -\infty$.

`4:` Aus `3.2.Fall` und
aus `2.2.Fall`
folgt: $0 < -\infty$.

`5:` Via **107-15** gilt: $\neg(0 < -\infty)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | “$x \in \mathbb{R}$”

`4:` Aus `2.2.Fall` und
aus `A1`
folgt: $0 < x \in \mathbb{R}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \leq 0) \vee (0 < x \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **317-44**</u> `b)`

`1:` Aus →) "$x < y$"
folgt via **107-9**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$y \in \mathbb{S}$"
folgt via **122-3**: $(y < 0) \stackrel{\star}{\texttt{aut}} (0 \le y)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y < 0$.

`3:` Aus →) "$x < y$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

`3.2.Fall` $y = +\infty$.

`4:` Aus `3.2.Fall` und
aus `2.1.Fall`
folgt: $+\infty < 0$.

`5:` Via **107-15** gilt: $\neg(+\infty < 0)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$y \in \mathbb{R}$"

`4:` Aus `A1` und
aus `2.1.Fall`
folgt: $\mathbb{R} \ni y < 0$.

`2.2.Fall` $0 \le y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(\mathbb{R} \ni y < 0) \vee (0 \le y)$.

□

317-45. Zu Satz **317-39** gibt es eine im Detail modifizerte und an einer Stelle das Vorzeichen wechselnde Version.

317-45(Satz)

a) *Aus* "$0 < x, y \in \mathbb{R}$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$".

b) *Aus* "$0 < x, y$" *und* "$x \in \mathbb{R}$"
folgt "$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$".

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-45** a) VS gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

1.1: Aus <**schola**"$0 < 2$" und
aus VS gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **FS**$\leq \cdot$: $0 < 2 \cdot x$.

1.2: Aus $\in$**schola**"$2 \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$\ldots x \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $2 \cdot x \in \mathbb{R}$.

1.3: Aus VS gleich "$0 < x \ldots \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-30**: $\exists \Phi : (1 \leq \Phi \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Phi < x)$.

2.1: Aus VS gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$" und
aus 1.2"$2 \cdot x \in \mathbb{R}$"
folgt via :**SZ**: $y : (2 \cdot x) \in \mathbb{R}$.

2.2: Aus 1.1"$0 < 2 \cdot x$",
aus 1.2"$2 \cdot x \in \mathbb{R}$" und
aus VS gleich "$0 < \ldots y \ldots$"
folgt via **317-27**: $0 < y : (2 \cdot x)$.

...

<u>Beweis **317-45**</u> `a)` `VS` gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

...

`3:` Aus `2.2`“$0 < y : (2 \cdot x)$” und
aus `2.1`“$y : (2 \cdot x) \in \mathbb{R}$”
folgt via **317-30**: $\exists \Psi : (1 \leq \Psi \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Psi < y : (2 \cdot x))$.

`4.1:` Aus `1.3`“$\ldots 1 \leq \Phi \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **300-9**: $0 < \Phi \in \mathbb{N}$.

`4.2:` Aus `1.3`“$\ldots \Phi \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-11**: $\Phi \in \mathbb{R}$.

`4.3:` Aus `3`“$\ldots 1 \leq \Psi \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **300-9**: $0 < \Psi \in \mathbb{N}$.

`4.4:` Aus `3`“$\ldots \Psi \in \mathbb{N} \ldots$”
folgt via **159-11**: $\Psi \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4.1`“$0 < \Phi \ldots$”,
aus `4.3`“$0 < \Psi \ldots$”,
aus `4.2`“$\Phi \in \mathbb{R}$” und
aus `4.4`“$\Psi \in \mathbb{R}$”
folgt via **317-36**:
$$(0 < 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\} \leq 1 : \Psi, 1 : \Phi) \wedge (1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\} \in \mathbb{R}).$$

`6:` Aus `1.3` und
aus `3`
folgt: $\exists \Omega : \Omega = 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\}$.

`7:` Aus `6`“$\ldots \Omega = 1 : \overset{\leq}{\mathsf{max}}\,\{\Phi, \Psi\}$” und
aus `5`
folgt: $(0 < \Omega \leq 1 : \Phi, 1 : \Psi) \wedge (\Omega \in \mathbb{R})$.

...

<u>Beweis **317-45**</u> `a)` `VS` gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

...

`8.1:` Aus `7`"$0 < \Omega \ldots$"
folgt via **107-9**: $\Omega \in \mathbb{S}$.

`8.2:` Aus `7`"$0 < \Omega \ldots$"
folgt via **41-3**: $0 \neq \Omega$.

`8.3:` Aus `7`"$\ldots \Omega \leq 1 : \Phi \ldots$" und
aus `1.3`"$\ldots 1 : \Phi < x$"
folgt via **107-8**: $\Omega < x$.

`8.4:` Aus `7`"$\ldots \Omega \leq \ldots 1 : \Psi \ldots$" und
aus `3`"$\ldots 1 : \Psi < y : (2 \cdot x)$"
folgt via **107-8**: $\Omega < y : (2 \cdot x)$.

`9.1:` Aus `8.2`"$0 \neq \Omega$" und
aus `8.1`"$\Omega \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < \Omega \cdot \Omega$.

`9.2:` Aus `1.1`"$0 < 2 \cdot x$",
aus `1.2`"$2 \cdot x \in \mathbb{R}$" und
aus `8.4`"$\Omega < y : (2 \cdot x)$"
folgt via **317-38**: $(2 \cdot x) \cdot \Omega < y$.

`9.3:` Aus `1.2`"$2 \cdot x \in \mathbb{R}$" und
aus `7`"$\ldots \Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via $\cdot$**SZ**: $(2 \cdot x) \cdot \Omega \in \mathbb{R}$.

`9.4:` Via **317-4** gilt: $\Omega \uparrow 2 = \Omega \cdot \Omega$.

`10.1:` Aus `9.3`"$(2 \cdot x) \cdot \Omega \in \mathbb{R}$" und
aus `9.1`"$0 < \Omega \cdot \Omega$"
folgt via **165-2**: $(2 \cdot x) \cdot \Omega - \Omega \cdot \Omega < (2 \cdot x) \cdot \Omega$.

`10.2:` Via **FS**$-+$ gilt: $-\Omega \cdot \Omega + (2 \cdot x) \cdot \Omega = (2 \cdot x) \cdot \Omega - \Omega \cdot \Omega$.

`11:` Aus `10.1` und
aus `10.2`
folgt: $-\Omega \cdot \Omega + (2 \cdot x) \cdot \Omega < (2 \cdot x) \cdot \Omega$.

`12:` Aus `11` und
aus `9.4`
folgt: $-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < (2 \cdot x) \cdot \Omega$.

...

<u>Beweis</u> **317-45** `a)` `VS` gleich $0 < x, y \in \mathbb{R}$.

...

`13:` Aus `12` "$-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < (2 \cdot x) \cdot \Omega$" und
aus `9.2` "$(2 \cdot x) \cdot \Omega < y$"
folgt via **107-8**: $-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$.

`14:` Aus `6` "$\exists \Omega \ldots$",
aus `7` "$0 < \Omega \ldots$",
aus `8.3` "$\Omega < x$",
aus `7` "$\ldots \Omega \in \mathbb{R}$" und
aus `13` "$-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$"
folgt:

$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y).$$

<u>Beweis **317-45**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x, y) \wedge (x \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < \ldots y \ldots$"
folgt via **107-9**: $(y \in \mathbb{R}) \vee (y = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$0 < x, y \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1.Fall` "$y \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y).$$

`1.2.Fall` $y = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$",
aus $<$**schola** "$0 < 1$" und
aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < 1).$$

`3:` Aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $1 < +\infty$.

`4:` Aus `2` "$\ldots -\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < 1$" und
aus `3` "$1 < +\infty$"
folgt via **107-8**: $-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < +\infty$.

`5:` Aus `4` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y$.

`6:` Aus `2` "$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \ldots$" und
aus `5` "$-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (-\Omega \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Omega < y).$$

□

317-46. Die alten Bekannten **160-10,11** werden hier ergänzt.

317-46(Satz)

a) *Aus* "$x \le y$" *folgt* "$0 + x \le y$" *und* "$x \le 0 + y$".

b) *Aus* "$x < y$" *folgt* "$0 + x < y$" *und* "$x < 0 + y$".

≤.RECH-**Notation**.

Beweis **317-46** a) VS gleich $x \le y$.

1.1: Aus VS gleich "$x \le y$"
folgt via **107-3**: $x, y \in \mathbb{S}$.

1.2: Aus VS gleich "$x \le y$"
folgt via **160-10**: $0 + x \le 0 + y$.

2: Aus 1.1 "$x, y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x, y Zahl.

3.1: Aus 2 "$x \ldots$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + x = x$.

3.2: Aus 2 "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + y = y$.

4.1: Aus 3.1 und
aus 1.2
folgt: $\boxed{x \le 0 + y}$

4.2: Aus 3.2 und
aus 1.2
folgt: $\boxed{0 + x \le y}$

<u>Beweis **317-46**</u> `b)` `VS` gleich $x < y$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **107-9**: $x, y \in \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$x < y$"
folgt via **160-11**: $0 + x < 0 + y$.

`2:` Aus `1.1`"$x, y \in \mathbb{S}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: x, y Zahl.

`3.1:` Aus `2`"$x \ldots$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + x = x$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots y$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + y = y$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{x < 0 + y}$

`4.2:` Aus `3.2` und
aus `1.2`
folgt: $\boxed{0 + x < y}$

$\square$

317-47. Eine etwas verwickelte Argumentation wird hier vorweggenommen. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a)`:

317-47(Satz)

`a)` *Aus* “$x, y \in \mathbb{R}$”

folgt “$-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) = x \uparrow 2 - (x - y) \uparrow 2$”.

`b)` *Aus* “$x, y \in \mathbb{C}$”

folgt “$-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) = x \uparrow 2 - (x - y) \uparrow 2$”.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-47** `b)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich “$x, y \in \mathbb{C}$”
folgt via **B**$\uparrow$ 2**F**: $(x - y) \uparrow = (x \uparrow 2 + y \uparrow 2) - 2 \cdot (x \cdot y)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “$x \ldots \in \mathbb{C}$”
folgt via **317-21**: $x \uparrow 2 \in \mathbb{C}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich “$\ldots y \in \mathbb{C}$”
folgt via **317-21**: $y \uparrow 2 \in \mathbb{C}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich “$x, y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $x \cdot y \in \mathbb{C}$.

`2.1:` Aus `1.2`“$x \uparrow 2 \in \mathbb{C}$”
folgt via **102-5**: $x \uparrow 2 - x \uparrow 2 = 0$.

`2.2:` Aus `1.3`“$y \uparrow 2 \in \mathbb{C}$”
folgt via **117-4**: $-y \uparrow 2 \in \mathbb{C}$.

`2.3:` Aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{C}$” und
aus `1.4`“$x \cdot y \in \mathbb{C}$”
folgt via $\cdot$**SZ**: $2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{C}$.

`3:` Aus `2.2`“$-y \uparrow 2 \in \mathbb{C}$” und
aus `2.3`“$2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{C}$”
folgt via $+$**SZ**: $-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{C}$.

`4:` Aus `3`“$-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{C}$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y)$ Zahl.

...

Beweis **317-47** `b)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{C}$.

...

`5:` Aus `4` "$-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y)$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + (-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y)) = -y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y)$.

`6:`
$$\begin{aligned}
-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) &\stackrel{5}{=} 0 + (-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y)) \\
&\stackrel{2.1}{=} (x \uparrow 2 - x \uparrow 2) + (-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y)) \\
&\stackrel{\mathbf{160-7}}{=} x \uparrow 2 + (-x \uparrow 2 + (-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y))) \\
&\stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} x \uparrow 2 + (-x \uparrow 2 + (-(y \uparrow 2 - 2 \cdot (x \cdot y)))) \\
&= x \uparrow 2 + (-x \uparrow 2 - (y \uparrow 2 - 2 \cdot (x \cdot y))) \\
&\stackrel{\mathbf{FS-+}}{=} x \uparrow 2 + (-(x \uparrow 2 + (y \uparrow 2 - 2 \cdot (x \cdot y)))) \\
&= x \uparrow 2 - (x \uparrow 2 + (y \uparrow 2 - 2 \cdot (x \cdot y))) \\
&\stackrel{\mathbf{160-7}}{=} x \uparrow 2 - ((x \uparrow 2 + y \uparrow 2) - 2 \cdot (x \cdot y)) \\
&\stackrel{1.1}{=} x \uparrow 2 - (x - y) \uparrow 2.
\end{aligned}$$

`7:` Aus `6`
folgt: $-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) = x \uparrow 2 - (x - y) \uparrow 2$.

`a)` `VS` gleich $x, y \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x, y \in \mathbb{R}$"
folgt via $\wedge$**SZ**: $x, y \in \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1` "$x, y \in \mathbb{C}$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$-y \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot y) = x \uparrow 2 - (x - y) \uparrow 2.$$

□

317-48. Aus $n \in \mathbb{N}$ folgt $n \leq n \uparrow 2$.

<u>**317-48(Satz)**</u>

`a)` *Aus* “$1 < x \in \mathbb{R}$” *folgt* “$x < x \uparrow 2$”.

`b)` *Aus* “$1 \leq x$” *folgt* “$x \leq x \uparrow 2$”.

`c)` *Aus* “$0 < x \in \mathbb{R}$” *folgt* “$x < (1 + x) \uparrow 2$”.

`d)` *Aus* “$0 \leq x \in \mathbb{R}$” *folgt* “$x < (1 + x) \uparrow 2$”.

`e)` *Aus* “$0 < x$” *folgt* “$x \leq (1 + x) \uparrow 2$”.

`f)` *Aus* “$0 \leq x$” *folgt* “$x \leq (1 + x) \uparrow 2$”.

`g)` *Aus* “$n \in \mathbb{N}$” *folgt* “$n \leq n \uparrow 2$”.

<u>$\leq$`.RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **317-48**</u> `a)` `VS` gleich $1 < x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus <**schola**“$0 < 1$” und
aus `VS` gleich “$1 < x \ldots$”
folgt via **107-8**: $0 < x$.

`2:` Aus `VS` gleich “$1 < x \ldots$” und
aus 2“$0 < x$”
folgt via **147-1**: $x \cdot 1 < x \cdot x$.

`3.1:` Aus `VS` gleich “$\ldots x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $1 \cdot x = x$.

`3.2:` Via **317-4** gilt: $x \cdot x = x \uparrow 2$.

`3.3:` Via **KGM** gilt: $x \cdot 1 = 1 \cdot x$.

`4:` Aus `2`,
aus `3.1`,
aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $x < x \uparrow 2$.

Beweis **317-48** `b)` `VS` gleich $1 \leq x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$1 \leq x$"
folgt via **41-5**: $(1 < x) \vee (1 = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $1 < x$.

`2:` Aus `1.1.Fall` "$1 < x$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `1.1.Fall` "$1 < x$" und
aus `2.1.Fall` "$x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x < x \uparrow 2$.

`4:` Aus 3 "$x < x \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $x \leq x \uparrow 2$.

`2.2.Fall` $x = +\infty$.

`3:` Aus **107-6** "$+\infty \leq +\infty$" und
aus **317-14** "$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$"
folgt: $+\infty \leq (+\infty) \uparrow 2$.

`4:` Aus 3 und
aus `2.2.Fall`
folgt: $x \leq x \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq x \uparrow 2$.

`1.2.Fall` $1 = x$.

`2:` Aus $\leq$**schola** "$1 \leq 1$" und
aus **317-14** "$1 \uparrow 2 = 1$"
folgt: $1 \leq 1 \uparrow 2$.

`3:` Aus 2 und
aus `1.2.Fall`
folgt: $x \leq x \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq x \uparrow 2$.

<u>Beweis **317-48**</u> `c)` `VS` gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **307-1**: $x < 1 + x$.

`1.2:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$0 < x \ldots$"
folgt via **165-2**: $1 < 1 + x$.

`1.3:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via $+$**SZ**: $1 + x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.2`"$1 < 1 + x$" und
aus `1.3`"$1 + x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $1 + x < (1 + x) \uparrow 2$.

`3:` Aus `1.1`"$x < 1 + x$" und
aus `2`"$1 + x < (1 + x) \uparrow 2$"
folgt via **107-8**: $x < (1 + x) \uparrow 2$.

`d)` `VS` gleich $0 \leq x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x \ldots$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < x$.

Aus `1.1.Fall`"$0 < x$" und
aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x < (1 + x) \uparrow 2$.

`1.2.Fall` $0 = x$.

`2:` Aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus **317-14**"$1 \uparrow 2 = 1$"
folgt: $0 < 1 \uparrow 2$.

`3:` Aus `2` und
aus $+$**schola**"$1 + 0 = 1$"
folgt: $0 < (1 + 0) \uparrow 2$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $x < (1 + x) \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x < (1 + x) \uparrow 2$.

<u>Beweis **317-48**</u> `e)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 < x$" und
aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $x < (1+x) \uparrow 2$.

`3:` Aus 2"$x < (1+x) \uparrow 2$"
folgt via **41-3**: $x \leq (1+x) \uparrow 2$.

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2.1:` Aus **107-6**"$+\infty \leq +\infty$" und
aus **317-14**"$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$"
folgt: $+\infty \leq (+\infty) \uparrow 2$.

`2.2:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $1 + (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $+\infty \leq (1 + (+\infty)) \uparrow 2$.

`4:` Aus `3` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $x \leq (1+x) \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq (1+x) \uparrow 2$.

<u>Beweis **317-48** `f)` `VS` gleich</u> $0 \leq x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \leq x$"
folgt via **41-5**: $(0 < x) \vee (0 = x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $0 < x.$

Aus `1.1.Fall` "$0 < x$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $x \leq (1 + x) \uparrow 2.$

`1.2.Fall` $0 = x.$

`2:` Aus $\leq$**schola** "$0 \leq 1$" und
aus **317-14** "$1 \uparrow 2 = 1$"
folgt: $0 \leq 1 \uparrow 2.$

`3:` Aus `2` und
aus $+$**schola** "$1 + 0 = 1$"
folgt: $0 \leq (1 + 0) \uparrow 2.$

`4:` Aus `3` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $x \leq (1 + x) \uparrow 2.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \leq (1 + x) \uparrow 2.$

<u>Beweis **317-48**</u> `g)` `VS` gleich $n \in \mathbb{N}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$”
folgt via **162-2**: $(n = 0) \vee (0 < n)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $n = 0$.

`2:` Aus $\leq$**schola**“$0 \leq 0$” und
aus **317-14**“$0 \uparrow 2 = 0$”
folgt: $0 \leq 0 \uparrow 2$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.1.Fall`
folgt: $n \leq n \uparrow 2$.

`1.2.Fall` $0 < n$.

`2:` Aus `VS` gleich “$n \in \mathbb{N}$” und
aus `1.2.Fall`“$0 < n$”
folgt via **300-9**: $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

`3:` Aus `2`“$1 \leq n \ldots$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $n \leq n \uparrow 2$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $n \leq n \uparrow 2$.

$\square$

317-49. Interessanter Weise ist von **317-43** auch eine “$y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$-Version” verfügbar. Hier muss nicht $x \in \mathbb{R}$ gelten.

317-49(Satz)

a) *Aus* “$0 < x \in \mathbb{R}$” *und* “$y < x \uparrow 2$”
folgt “$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2)$”.

b) *Aus* “$0 < x$” *und* “$y < x \uparrow 2$”
folgt “$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2)$”.

$\leq$.RECH-**Notation**.

Beweis **317-49** a) VS gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

1.1: Aus VS gleich “$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **317-21**: $x \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

1.2: Aus VS gleich “$\ldots y < x \uparrow 2$”
folgt via **109-7**: $0 < x \uparrow 2 - y$.

2: Aus VS gleich “$0 < x \ldots$”,
aus 1.2“$0 < x \uparrow 2 - y$” und
aus VS gleich “$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **317-45**:
$$\exists \Phi : (0 < \Phi < x) \wedge (\Phi \in \mathbb{R}) \wedge (-\Phi \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Phi < x \uparrow 2 - y).$$

3.1: Aus $\in$**schola**“$2 \in \mathbb{R}$” und
aus 2“$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AGM$\mathbb{R}$**: $2 \cdot (x \cdot \Phi) = (2 \cdot x) \cdot \Phi$.

3.2: Aus VS gleich “$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus 2“$\ldots \Phi \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **317-47**: $-\Phi \uparrow 2 + 2 \cdot (x \cdot \Phi) = x \uparrow 2 - (x - \Phi) \uparrow 2$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $-\Phi \uparrow 2 + (2 \cdot x) \cdot \Phi = x \uparrow 2 - (x - \Phi) \uparrow 2$.

5: Aus 4 und
aus 2
folgt: $x \uparrow 2 - (x - \Phi) \uparrow 2 < x \uparrow 2 - y$.

...

<u>Beweis **317-49**</u> `a)` `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

...

`6:` Aus `5`"$x \uparrow 2 - (x - \Phi) \uparrow 2 < x \uparrow 2 - y$" und
aus `1.1`"$x \uparrow 2 \in \mathbb{R}$"
folgt via **VR**<: $y < (x - \Phi) \uparrow 2$.

`7.1:` Aus `2`"$\ldots \Phi < x \ldots$"
folgt via **109-7**: $0 < x - \Phi$.

`7.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2`"$\ldots 0 < \Phi \ldots$"
folgt via **165-2**: $x - \Phi < x$.

`8:` Aus `7.1`"$0 < x - \Phi$" und
aus `7.2`"$x - \Phi < x$"
folgt via **317-37**: $(x - \Phi) \uparrow 2 < x \uparrow 2$.

`9:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2`
folgt: $\exists \Omega : \Omega = x - \Phi$.

`10.1:` Aus `7.1`"$0 < x - \Phi$" und
aus `9`"$\ldots \Omega = x - \Phi$"
folgt: $0 < \Omega$.

`10.2:` Aus `7.2`"$x - \Phi < x$" und
aus `9`"$\ldots \Omega = x - \Phi$"
folgt: $\Omega < x$.

`10.3:` Aus `6`"$y < (x - \Phi) \uparrow 2$" und
aus `9`"$\ldots \Omega = x - \Phi$"
folgt: $y < \Omega \uparrow 2$.

`10.4:` Aus `8`"$(x - \Phi) \uparrow 2 < x \uparrow 2$" und
aus `9`"$\ldots \Omega = x - \Phi$"
folgt: $\Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$.

`11:` aus `10.1`"$0 < \Omega$" und
aus `10.2`"$\Omega < x$"
folgt via **107-12**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

...

<u>Beweis **317-49**</u> `a)` `VS` gleich $(0 < x \in \mathbb{R}) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

...

`12:` Aus `9`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `10.1`“$0 < \Omega$”,
aus `10.2`“$\Omega < x$”,
aus `11`“$\Omega \in \mathbb{R}$”,
aus `10.3`“$y < \Omega \uparrow 2$” und
aus `10.4`“$\Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$”
folgt:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2).$$

`b)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$0 < x$”
folgt via **107-9**: $(x \in \mathbb{R}) \vee (x = +\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich “$0 < x \ldots$”,
aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{R}$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y < x \uparrow 2$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2).$$

...

<u>Beweis **317-49**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Aus `VS` gleich "$y < x \uparrow 2$"
folgt via **317-44**: $(y \leq 0) \vee (0 < y \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y \leq 0$.

`3.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 1$.

`3.2:` Aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $1 < +\infty$.

`3.3:` Aus `1.2.Fall`"$x = +\infty$" und
aus **317-14**"$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$"
folgt: $x \uparrow 2 = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.1.Fall`"$y \leq 0$" und
aus $<$**schola**"$0 < 1$"
folgt via **107-8**: $y < 1$.

`4.1:` Aus $<$**schola**"$0 < 1$" und
aus `3.1`"$\ldots \Omega = 1$"
folgt: $0 < \Omega$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\ldots \Omega = 1$" und
aus `3.2`
folgt: $\Omega < +\infty$.

`4.3:` Aus `3.1`"$\ldots \Omega = 1$" und
aus **317-14**"$1 \uparrow 2 = 1$"
folgt: $\Omega \uparrow 2 = 1$.

`4.4:` Aus `3.1`"$\ldots \Omega = 1$" und
aus $\in$**schola**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`4.5:` Aus `3.2` und
aus `3.3`
folgt: $1 < x \uparrow 2$.

...

...

...

<u>Beweis **317-49**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

...

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $y \leq 0$.

...

`5.1:` Aus `4.2` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $\Omega < x$.

`5.2:` Aus `3.4` und
aus `4.3`
folgt: $y < \Omega \uparrow 2$.

`5.3:` Aus `4.3` und
aus `4.5`
folgt: $\Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$.

`6:` Aus `3.1`"$\exists \Omega \ldots$",
aus `4.1`"$0 < \Omega$",
aus `5.1`"$\Omega < x$",
aus `4.4`"$\Omega \in \mathbb{R}$",
aus `5.2`"$y < \Omega \uparrow 2$" und
aus `5.3`"$\Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$"
folgt:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2).$$

...

...

<u>Beweis **317-49**</u> `b)` `VS` gleich $(0 < x) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 < y \in \mathbb{R}$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$0 < y \in \mathbb{R}$"
folgt via **Archimedes III**: $\exists \Omega : (\Omega \in \mathbb{N}) \wedge (y < \Omega)$.

`3.2:` Aus **107-6**"$+\infty \leq +\infty$" und
aus **317-14**"$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$"
folgt: $+\infty \leq (+\infty) \uparrow 2$.

`4.1:` Aus `2.2.Fall`"$0 < y \ldots$" und
aus `3.1`"$\ldots y < \Omega$"
folgt via **107-8**: $0 < \Omega$.

`4.2:` Aus `3.1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **159-11**: $\Omega \in \mathbb{R}$.

`4.3:` Aus `3.1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **317-48**: $\Omega \leq \Omega \uparrow 2$.

`4.4:` Aus `3.2` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $+\infty \leq x \uparrow 2$.

`5.1:` Aus `4.2`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $\Omega < +\infty$.

`5.2:` Aus `4.2`"$\Omega \in \mathbb{R}$"
folgt via **317-21**: $\Omega \uparrow 2 \in \mathbb{R}$.

`5.3:` Aus `3.1`"$\ldots y < \Omega$" und
aus `4.3`"$\Omega \leq \Omega \uparrow 2$"
folgt via **107-8**: $y < \Omega \uparrow 2$.

...

...

<u>Beweis **317-49**</u> `b) VS` gleich $(0 < x) \wedge (y < x \uparrow 2)$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x = +\infty$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $0 < y \in \mathbb{R}$.

...

`6.1:` Aus `5.1` und
aus `1.2.Fall`
folgt: $\Omega < x$.

`6.2:` Aus `5.2`“$\Omega \uparrow 2 \in \mathbb{R}$”
folgt via **107-11**: $\Omega \uparrow 2 < +\infty$.

`7:` Aus `6.2`“$\Omega \uparrow 2 < +\infty$” und
aus `4.4`“$+\infty \leq x \uparrow 2$”
folgt via **107-8**: $\Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$.

`8:` Aus `3.1`“$\exists \Omega \ldots$”,
aus `4.1`“$0 < \Omega$”,
aus aus `6.1`“$\Omega < x$”,
aus `4.2`“$\Omega \in \mathbb{R}$”,
aus `5.3`“$y < \Omega \uparrow 2$” und
aus `7`“$\Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2$”
folgt:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2).$$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$\exists \Omega : (0 < \Omega < x) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y < \Omega \uparrow 2 < x \uparrow 2).$$
□

317-50. Die Klasse $\mathtt{317.0}(x)$ wird nur deswegen eingesetzt, weil dadurch die Notation etwas einfacher wird.

317-50(Definition)

$$\mathtt{317.0}(x) =]0|+\infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[].$$

317-51 Aus $0 \neq x \in \mathbb{S}$ folgt $0 < x \uparrow 2$.

<u>**317-51(Satz)**</u>

a) *Aus* "$0 \neq x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$0 < x \uparrow 2$".

b) *Aus* "$0 < x$" *folgt* "$0 < x \uparrow 2$".

c) *Aus* "$x < 0$" *folgt* "$0 < x \uparrow 2$".

<u>$\leq$-**Notation**</u>.

Beweis **317-51**

`RECH`-**Notation**.

`a)` `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{S}$"
folgt via **127-10**: $0 < x \cdot x$.

`2:` Via **317-4** gilt: $x \uparrow 2 = x \cdot x$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $0 < x \uparrow 2$.

`b)` `VS` gleich $0 < x$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **41-3**: $0 \neq x$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`"$0 \neq x$" und
aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x \uparrow 2$.

`c)` `VS` gleich $x < 0$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$x < 0$"
folgt via **41-3**: $x \neq 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1`
folgt: $0 \neq x$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq x$" und
aus `1.2`"$x \in \mathbb{S}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < x \uparrow 2$.

$\square$

317-52. Die Elemente von $\mathtt{317.0}(x)$ sind genau jene positiven, reellen Zahlen p für die $p \uparrow 2 < x$ gilt.

317-52(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathtt{317.0}(x)$.

`ii)` *"$0 < p \in \mathbb{R}$" und "$p \uparrow 2 < x$".*

$\mathtt{317.0}(x) =]0| + \infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$ **317-50(Def)**.

Beweis **317-52** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich $p \in \mathtt{317.0}(x)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathtt{317.0}(x)$"
folgt via **317-50(Def)**: $p \in]0| + \infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$.

`2:` Aus `1`"$p \in]0| + \infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$"
folgt via **2-2**: $(p \in]0| + \infty[) \wedge (p \in (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[])$.

`3.1:` Aus `2`"$p \in]0| + \infty[\ldots$"
folgt via **142-3**: $0 < p < +\infty$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots p \in (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$" und
aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion"
folgt via **18-29**: $p \uparrow 2 \in]0|x[$.

`4.1:` Aus `3.1`"$0 < p < +\infty$"
folgt via **107-12**: $p \in \mathbb{R}$.

`4.2:` Aus `3.2`"$p \uparrow 2 \in]0|x[$"
folgt via **142-3**: $0 < p \uparrow 2 < x$.

`5.1:` Aus `3.1`"$0 < p \ldots$" und
aus `4.1`"$p \in \mathbb{R}$"

folgt: $\boxed{0 < p \in \mathbb{R}}$

`5.2:` Aus `4.2`

folgt: $\boxed{p \uparrow 2 < x}$

<u>Beweis **317-52**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(0 < p \in \mathbb{R}) \wedge (p \uparrow 2 < x)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots p \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **107-11**: $p < +\infty$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 < p \ldots$"
folgt via **317-51**: $0 < p \uparrow 2$.

`2.1:` aus `VS` gleich "$0 < p \ldots$" und
aus `1.1`"$p < +\infty$"
folgt via **142-3**: $p \in \,]0| + \infty[$.

`2.2:` Aus `1.2`"$0 < p \uparrow 2$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \uparrow 2 < x$"
folgt via **142-3**: $p \uparrow 2 \in \,]0|x[$.

`3:` Aus **317-4**"$\uparrow 2$ Funktion" und
aus `2.2`"$p \uparrow 2 \in \,]0|x[$"
folgt via **18-29**: $p \in (\uparrow 2)^{-1}[\,]0|x[\,]$.

`4:` Aus `2.1`"$p \in \,]0| + \infty[$" und
aus `3`"$p \in (\uparrow 2)^{-1}[\,]0|x[\,]$"
folgt via **2-2**: $p \in \,]0| + \infty[\, \cap (\uparrow 2)^{-1}[\,]0|x[\,]$.

`5:` Aus `4`
folgt via **317-50(Def)**: $p \in \mathsf{317.0}(x)$.

$\square$

317-53. Weitere Eigenschaften von $\mathtt{317.0}(x)$ vereinfachen die voranschreitenden Untersuchungen.

317-53(Satz)

a) *Aus* “$p \in \mathtt{317.0}(x)$” *folgt* “$0 < x$” *und* “$p < 1 + x$”.

b) *Aus* “$0 < x$” *folgt* “$\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < (1 : \Omega) \uparrow 2 < x)$”.

c) *Aus* “$0 < x$” *folgt* “$\exists \Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 : \Omega \in \mathtt{317.0}(x))$”.

d) *Aus* “$0 < x$” *folgt* “$0 \neq \mathtt{317.0}(x)$”.

$\mathtt{317.0}(x) =]0| + \infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$ **317-50(Def)**.

Beweis **317-53** a) VS gleich $p \in \mathtt{317.0}(x)$.

1: Aus VS gleich “$p \in \mathtt{317.0}(x)$”
folgt via **317-52**: $(0 < p \in \mathbb{R}) \wedge (p \uparrow 2 < x)$.

2: Aus 1“$0 < p \ldots$”
folgt via **317-51**: $0 < p \uparrow 2$.

3: Aus 2“$0 < p \uparrow 2$” und
aus 1“$\ldots p \uparrow 2 < x$”
folgt via **107-8**: $\boxed{0 < x}$

4: Aus 3“$0 < x$”
folgt via **317-48**: $x \leq (1 + x) \uparrow 2$.

5: Aus 4“$x \leq (1 + x) \uparrow 2$”
folgt via **107-3**: $x, (1 + x) \uparrow 2 \in \mathbb{S}$.

6: Aus 1“$\ldots p \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via $\wedge$**SZ**: $p \in \mathbb{S}$.

...

Beweis **317-53** `a)` `VS` gleich $p \in \mathtt{317.0}(x)$.

...

`7:` Aus `6`“$p \in \mathbb{S}$” und
aus `5`“$\ldots (1+x) \uparrow 2 \in \mathbb{S}$”
folgt via **107-14**: $(p < 1+x) \vee (1+x \leq p)$.

`Fallunterscheidung`

`7.1.Fall` $p < 1+x$.

`7.2.Fall` $1+x \leq p$.

`8:` Aus `5`“$x \ldots \in \mathbb{S}$”
folgt via **160-12**: $x \leq 1+x$.

`9:` Aus `3`“$0 < x$” und
aus `8`“$x \leq 1+x$”
folgt via **107-8**: $0 < 1+x$.

`10:` Aus `9`“$0 < 1+x$” und
aus `7.2.Fall`“$1+x \leq p$”
folgt via **317-37**: $(1+x) \uparrow 2 \leq p \uparrow 2$.

`11:` Aus `4`“$x \leq (1+x) \uparrow 2$” und
aus `10`“$(1+x) \uparrow 2 \leq p \uparrow 2$”
folgt via **107-8**: $x \leq p \uparrow 2$.

`12:` Aus `1`“$\ldots p \uparrow 2 < x$”
folgt via **107-13**: $\neg(x \leq p \uparrow 2)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\boxed{p < 1+x}$

<u>Beweis **317-53**</u> `bcd)` `VS` gleich $0 < x$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 < x$"
folgt via **317-30**: $\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < 1 : \Omega < x)$.

`2.1:` Aus `1`"$\ldots 0 < 1 : \Omega \ldots$"
folgt via **317-51**: $0 < (1 : \Omega) \uparrow 2$.

`2.2:` Aus `1`"$\ldots \Omega \in \mathbb{N} \ldots$"
folgt via **317-17**: $(1 : \Omega) \uparrow 2 \leq 1 : \Omega$.

`3:` Aus `2.2`"$(1 : \Omega) \uparrow 2 \leq 1 : \Omega$" und
aus `1`"$\ldots 1 : \Omega < x$"
folgt via **107-8**: $(1 : \Omega) \uparrow 2 < x$.

`4.b):` Aus `1`"$\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \ldots$",
aus `2.1`"$0 < (1 : \Omega) \uparrow 2$" und
aus `3`"$(1 : \Omega) \uparrow 2 < x$"
folgt: $\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (0 < (1 : \Omega) \uparrow 2 < x)$.

`4.1:` Aus `1`"$\ldots 0 < 1 : \Omega < x$"
folgt via **107-12**: $1 : \Omega \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `1`"$\ldots 0 < 1 : \Omega \ldots$",
aus `4.1`"$1 : \Omega \in \mathbb{R}$" und
aus `3`"$(1 : \Omega) \uparrow 2 < x$"
folgt via **317-52**: $1 : \Omega \in \mathsf{317.0}(x)$.

`6.c):` Aus `1`"$\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \ldots$" und
aus `5`"$1 : \Omega \in \mathsf{317.0}(x)$"
folgt: $\exists\Omega : (1 \leq \Omega \in \mathbb{N}) \wedge (1 : \Omega \in \mathsf{317.0}(x))$.

`6.d):` Aus `5`"$1 : \Omega \in \mathsf{317.0}(x)$"
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathsf{317.0}(x)$.

$\square$

317-54. 0 ist eine untere $\leq$ _Schranke von $\mathtt{317.0}(x)$. Falls $x \in \mathbb{S}$, so ist $1+x$ eine obere $\leq$ _Schranke von $\mathtt{317.0}(x)$.

317-54(Satz)

a) $\mathtt{317.0}(x) \subseteq \,]0| + \infty[$.

b) $\mathtt{317.0}(x) \subseteq \mathbb{S}$.

c) 0 *untere* $\leq$ *_Schranke von* $\mathtt{317.0}(x)$.

d) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *folgt* "$1 + x$ *obere* $\leq$ *_Schranke von* $\mathtt{317.0}(x)$ ".

e) *Aus* "y *ist* $\leq$ *_Infimum von* $\mathtt{317.0}(x)$ " *folgt* "$0 \leq y$".

f) *Aus* "$x \in \mathbb{S}$" *und* "y *ist* $\leq$ *_Supremum von* $\mathtt{317.0}(x)$ "
folgt "$y \leq 1 + x$".

$\mathtt{317.0}(x) = \,]0| + \infty[\, \cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$ **317-50(Def)**.
$\leq$.`RECH`-**Notation**.

Beweis **317-54** `ab)`

`1:` Via **2-7** gilt: $]0| + \infty[\, \cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[] \subseteq \,]0| + \infty[$.

`2.a):` Aus `1`
folgt via **317-50(Def)**: $\mathtt{317.0}(x) \subseteq \,]0| + \infty[$.

`3:` Via **142-4** gilt: $]0| + \infty[\, \subseteq \mathbb{S}$.

`4.b):` Aus `2.a)` "$\mathtt{317.0}(x) \subseteq \,]0| + \infty[$" und
aus `3` "$]0| + \infty[\, \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-6**: $\mathtt{317.0}(x) \subseteq \mathbb{S}$.

<u>Beweis **317-54**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in \mathsf{317.0}(x)$.
`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathsf{317.0}(x)$ " folgt via **317-53**:	$0 < \alpha$.
`3:` Aus 2 "$0 < \alpha$" folgt via **41-3**:	$0 \le \alpha$.

Ergo `Thema1`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{317.0}(x)\,) \Rightarrow (0 \le \alpha)$"

`2:` Aus $\in$**schola** "$0 \in \mathbb{S}$ und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{317.0}(x)\,) \Rightarrow (0 \le \alpha)$"
folgt via **157-7**: 0 untere $\le$ _Schranke von $\mathsf{317.0}(x)$.

`d)` `VS` gleich $x \in \mathbb{S}$.

`1.1:` Aus $\in$**schola** "$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S}$"
folgt via +**SZ**: $1 + x \in \mathbb{S}$.

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in \mathsf{317.0}(x)$.
`2:` Aus `Thema1.2` "$\alpha \in \mathsf{317.0}(x)$ " folgt via **317-53**:	$\alpha < 1 + x$.
`3:` Aus 2 "$\alpha < 1 + x$" folgt via **41-3**:	$\alpha \le 1 + x$.

Ergo `Thema1.2`: `A1` | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{317.0}(x)\,) \Rightarrow (\alpha \le 1 + x)$"

`2:` Aus `1.1` "$1 + x \in \mathbb{S}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{317.0}(x)\,) \Rightarrow (\alpha \le 1 + x)$"
folgt via **157-7**: $1 + x$ obere $\le$ _Schranke von $\mathsf{317.0}(x)$.

<u>Beweis **317-54**</u> `e)` `VS` gleich y ist $\leq$ _Infimum von $\mathtt{317.0}(x)$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: 0 untere $\leq$ _Schranke von $\mathtt{317.0}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Infimum von $\mathtt{317.0}(x)$ " und
aus `1` "0 untere $\leq$ _Schranke von $\mathtt{317.0}(x)$ "
folgt via **36-1(Def)**: $0 \leq y$.

`f)` `VS` gleich $(x \in \mathbb{S}) \wedge (y$ ist $\leq$ _Supremum von $\mathtt{317.0}(x)$).

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:
$1 + x$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathtt{317.0}(x)$.

`2:` Aus `VS` gleich "y ist $\leq$ _Supremum von $\mathtt{317.0}(x)$ " und
aus `1` "$1 + x$ obere $\leq$ _Schranke von $\mathtt{317.0}(x)$ "
folgt via **36-1(Def)**: $y \leq 1 + x$.

□

317-55. Zwecks einfacheren Zitierens soll die "Negations-Version" von **317-52** nachgereicht werden.

317-55(Satz) *Die Aussagen* `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin \mathsf{317.0}(x)$.

`ii)` "$\neg(0 < p)$" *oder* "$p \notin \mathbb{R}$" *oder* "$\neg(p \uparrow 2 < x)$".

$\mathsf{317.0}(x) \; = \;]0| + \infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$ **317-50(Def)**.
≤-Notation.

Beweis **317-55**

`1:` Via **317-52** gilt: $(p \in \mathsf{317.0}(x)) \Leftrightarrow ((0 < p \in \mathbb{R}) \wedge (p \uparrow 2 < x))$.

`2:` Aus `1` folgt. $(p \notin \mathsf{317.0}(x)) \Leftrightarrow ((\neg(0 < p \in \mathbb{R})) \vee (\neg(p \uparrow 2 < x)))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(p \notin \mathsf{317.0}(x)) \Leftrightarrow ((\neg(0 < p)) \vee (\neg(p \in \mathbb{R})) \vee (\neg(p \uparrow 2 < x)))$.

`4:` Aus `3` folgt: $(p \notin \mathsf{317.0}(x)) \Leftrightarrow ((\neg(0 < p)) \vee (p \notin \mathbb{R}) \vee (\neg(p \uparrow 2 < x)))$.

□

317-56. Falls $0 < x \in \mathbb{R}$, so hat das $\leq$ _Supremum von $\mathtt{317.0}(x)$ ansprechende Eigenschaften.

<u>**317-56(Satz)**</u> *Es gelte:*

$\rightarrow\!\!)$ $0 < x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow\!\!)$ *y ist $\leq$ _Supremum von* $\mathtt{317.0}(x)$.

Dann folgt:

a) $0 < y \leq 1 + x$.

b) $y \in \mathbb{R}$.

c) $\neg(y \uparrow 2 < x)$.

d) $\neg(x < y \uparrow 2)$.

e) $y \uparrow 2 = x$.

$\mathtt{317.0}(x) \;=\;]0| + \infty[\;\cap\; (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$ **317-50(Def)**.
<u>$\leq$.RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **317-56**</u>

<u>RECH-**Notation**</u>.

---

a)

1.1: Aus $\rightarrow\!\!)$ "$0 < x \ldots$"
folgt via **317-53**: $0 \neq \mathtt{317.0}(x)$.

1.2: Aus $\rightarrow\!\!)$ "$0 < x \ldots$"
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

2.1: Aus 1.1 "$0 \neq \mathtt{317.0}(x)$ "
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in \mathtt{317.0}(x)$.

2.2: Aus 1.2 "$x \in \mathbb{S}$" und
aus $\rightarrow\!\!)$ "y ist $\leq$ _Supremum von $\mathtt{317.0}(x)$ "
folgt via **317-54**: $\boxed{y \leq 1 + x}$

...

<u>Beweis **317-56**</u> `a)` ...

`3.1:` Aus →) "y ist $\leq$ _Supremum von $\mathsf{317.0}(x)$ " und
aus `2.1` "$\ldots \Omega \in \mathsf{317.0}(x)$ "
folgt via **36-4**: $\Omega \leq y$.

`3.2:` Aus `2.1` "$\ldots \Omega \in \mathsf{317.0}(x)$ "
folgt via **317-52**: $0 < \Omega$.

`4:` Aus `3.2` "$0 < \Omega$" und
aus `3.1` "$\Omega \leq y$"
folgt via **107-8**: $\boxed{0 < y}$

`b)`

`1:` Aus ∈**schola** "$1 \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via +**SZ**: $1 + x \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1` "$1 + x \in \mathbb{R}$"
folgt via **107-11**: $1 + x < +\infty$.

`3:` Aus →) "$0 < x \in \mathbb{R}$" und
aus →) "y ist $\leq$ _Supremum von $\mathsf{317.0}(x)$ "
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < y \leq 1 + x$.

`4:` Aus `3` "$\ldots y \leq 1 + x$" und
aus `2` "$1 + x < +\infty$"
folgt via **107-8**: $y < +\infty$.

`5:` Aus `3` "$0 < y \ldots$" und
aus `4` "$y < +\infty$"
folgt via **107-12**: $y \in \mathbb{R}$.

<u>Beweis **317-56** `c)`</u>

`1:` Es gilt: $(y \uparrow 2 < x) \vee (\neg(y \uparrow 2 < x))$.

`wfFallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y \uparrow 2 < x$.

`2.1:` Aus →) “$0 < x \in \mathbb{R}$” und
aus →) “y ist $\leq$ _Supremum von `317.0`(x) ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 < y$.

`2.2:` Aus →) “$0 < x \in \mathbb{R}$” und
aus →) “y ist $\leq$ _Supremum von `317.0`(x) ”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $y \in \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2.1`“$0 < y$”,
aus `2.2`“$y \in \mathbb{R}$” und
aus `1.1.Fall`“$y \uparrow 2 < x$”
folgt via **317-43**: $\exists \Omega : (0 < y < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (y \uparrow 2 < \Omega \uparrow 2 < x)$.

`4:` Aus `3`“$\ldots 0 < y < \Omega \ldots$”
folgt via **107-8**: $0 < \Omega$.

`5:` Aus `4`“$0 < \Omega$”,
aus `3`“$\ldots \Omega \in \mathbb{R} \ldots$” und
aus `3`“$\ldots \Omega \uparrow 2 < x$”
folgt via **317-52**: $\Omega \in$ `317.0`(x).

`6:` Aus →) “y ist $\leq$ _Supremum von `317.0`(x) ” und
aus `5`“$\Omega \in$ `317.0`(x) ”
folgt via **36-4**: $\Omega \leq y$.

`7:` Aus `6`“$\Omega \leq y$”
folgt via **107-13**: $\neg(y < \Omega)$.

`8:` Aus `3`
folgt: $y < \Omega$.

`Ende wfFallunterscheidung` $\neg(y \uparrow 2 < x)$.

Beweis **317-56** d)

1: Es gilt: $(x < y \uparrow 2) \vee (\neg(x < y \uparrow 2))$.

$\boxed{\texttt{wfFallunterscheidung}}$

$\boxed{\texttt{1.1.Fall}}$ $x < y \uparrow 2$.

2.1: Aus 1.1.Fall "$x < y \uparrow 2$"
folgt via **107-13**: $\neg(y \uparrow 2 \le x)$.

2.2: Aus →) "$0 < x \in \mathbb{R}$" und
aus →) "y ist $\le$ _Supremum von 317.0(x)"
folgt via des bereits bewiesenen a): $0 < y$.

3.1: Aus 2.1 "$\neg(y \uparrow 2 \le x)$"
folgt via **41-5**: $\neg(y \uparrow 2 < x)$.

3.2: Aus 2.2 "$0 < y$" und
aus 1.1.Fall "$x < y \uparrow 2$"
folgt via **317-49**:
$\exists \Omega : (0 < \Omega < y) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (x < \Omega \uparrow 2 < y \uparrow 2)$.

4: Aus 3.1 "$\neg(y \uparrow 2 < x)$"
folgt via **317-55**: $y \notin$ 317.0(x).

5: Aus →) "y ist $\le$ _Supremum von 317.0(x)",
aus 4 "$y \notin$ 317.0(x)" und
aus 3.2 "$\ldots \Omega < y \ldots$"
folgt via **173-2**: $\exists \xi : (\xi \in$ 317.0(x)$) \wedge (\Omega < \xi < y)$.

6.1: Aus 5 "$\ldots \xi \in$ 317.0(x) $\ldots$"
folgt via **317-52**: $\xi \uparrow 2 < x$.

6.2: Aus 3.2 "$0 < \Omega \ldots$" und
aus 5 "$\ldots \Omega < \xi \ldots$"
folgt via **317-37**: $\Omega \uparrow 2 < \xi \uparrow 2$.

7.1: Aus 6.1 "$\xi \uparrow 2 < x$"
folgt via **107-13**: $\neg(x < \xi \uparrow 2)$.

7.2: Aus 3.2 "$\ldots x < \Omega \uparrow 2 \ldots$" und
aus 6.2 "$\Omega \uparrow 2 < \xi \uparrow 2$"
folgt via **107-8**: $x < \xi \uparrow 2$.

$\boxed{\texttt{Ende wfFallunterscheidung}}$ $\neg(x < y \uparrow 2)$.

<u>Beweis **317-56**</u> `e)`

`1.1:` Aus →) “$0 < x \in \mathbb{R}$” und
aus →) “y ist $\leq$ _Supremum von `317.0`(x) ”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`:

$$\neg(y \uparrow 2 < x).$$

`1.2:` Aus →) “$0 < x \in \mathbb{R}$” und
aus →) “y ist $\leq$ _Supremum von `317.0`(x) ”
folgt via des bereits bewiesenen `d)`:

$$\neg(x < y \uparrow 2).$$

`1.3:` Aus →) “$0 < x \ldots$”
folgt via **107-9**: $x \in \mathbb{S}$.

`1.4:` Aus →) “y ist $\leq$ _Supremum von `317.0`(x) ”
folgt via **157-3**: $y \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.4`“$y \in \mathbb{S}$”
folgt via **317-21**: $y \uparrow 2 \in \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`“$y \uparrow 2 \in \mathbb{S}$” und
aus `1.3`“$x \in \mathbb{S}$”
folgt via **122-2**: $(y \uparrow 2 < x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (y \uparrow 2 = x) \overset{\star}{\texttt{aut}} (x < y \uparrow 2)$.

`4:` Aus `3`,
aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $y \uparrow 2 = x$.

□

317-57. Zu jedem $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ gibt es ein $y \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$ mit $y \uparrow 2 = x$.

317-57(Satz)

a) *Aus* "$0 < x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$".

b) *Aus* "$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$"
folgt "$\exists \Omega : (\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$".

c) $(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

d) $(\uparrow 2)[\mathbb{T}] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

$\leq$-Notation.

Beweis **317-57**

$\mathsf{317.0}(x) =]0| + \infty[\cap (\uparrow 2)^{-1}[]0|x[]$ **317-50(Def)**

---

a) VS gleich $0 < x \in \mathbb{R}$.

1: Via **317-54** gilt: $\mathsf{317.0}(x) \subseteq \mathbb{S}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{317.0}(x) \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **190-3**: $\overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, \mathsf{317.0}(x)$ ist $\leq$ -Supremum von $\mathsf{317.0}(x)$.

3: Aus 2
folgt: $\exists \Omega : \Omega = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, \mathsf{317.0}(x)$.

4: Aus 3 "$\ldots \Omega = \overset{\leq}{\mathsf{sup}}\, \mathsf{317.0}(x)$" und
aus 2
folgt: Ω ist $\leq$ -Supremum von $\mathsf{317.0}(x)$.

5: Aus VS gleich "$0 < x \in \mathbb{R}$" und
aus 4 "Ω ist $\leq$ -Supremum von $\mathsf{317.0}(x)$"
folgt via **317-56**: $(0 < \Omega) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

6: Aus 3 "$\exists \Omega \ldots$" und
aus 5 "$(0 < \Omega) \wedge (\Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$"
folgt: $\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

Beweis **317-57** `b)` `VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

1: Aus `VS` gleich “$x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$”
folgt via **317-8**: $(x = 0) \vee (0 < x < +\infty) \vee (x = +\infty) \vee (x = \mathsf{nan})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

2: Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = 0$.

3.1: Aus 2“$\ldots \Omega = 0$”
folgt via **317-8**: $\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

3.2: Aus **317-14**“$0 \uparrow 2 = 0$”,
aus 2“$\ldots \Omega = 0$” und
aus `1.1.Fall`“$x = 0$”
folgt: $\Omega \uparrow 2 = x$.

4: Aus 2“$\exists \Omega \ldots$”,
aus 3.1“$\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus 3.2“$\Omega \uparrow 2 = x$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

`1.2.Fall` $0 < x < +\infty$.

2: Aus `1.2.Fall`“$0 < x < +\infty$”
folgt via **107-12**: $x \in \mathbb{R}$.

3: Aus `1.2.Fall`“$0 < x \ldots$” und
aus 2“$x \in \mathbb{R}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\exists \Omega : (0 < \Omega \in \mathbb{R}) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

4: Aus 3“$\ldots \Omega \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **107-11**: $\Omega < +\infty$.

5: Aus 3“$\ldots 0 < \Omega \ldots$” und
aus 4“$\Omega < +\infty$”
folgt via **317-8**: $\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

6: Aus 3“$\exists \Omega \ldots$”,
aus 5“$\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$” und
aus 3“$\ldots \Omega \uparrow 2 = x$”
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

...

<u>Beweis **317-57**</u> `b) VS` gleich $x \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $x = +\infty$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = +\infty$.

`3.1:` Aus 2"$\ldots \Omega = +\infty$"
folgt via **317-8**: $\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3.2:` Aus **317-14**"$(+\infty) \uparrow 2 = +\infty$",
aus 2"$\ldots \Omega = +\infty$" und
aus `1.3.Fall`"$x = +\infty$"
folgt: $\Omega \uparrow 2 = x$.

`4:` Aus 2"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.1`"$\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `3.2`"$\Omega \uparrow 2 = x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

`1.4.Fall` $x = \mathsf{nan}$.

`2:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{nan}$.

`3.1:` Aus 2"$\ldots \Omega = \mathsf{nan}$"
folgt via **317-8**: $\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$.

`3.2:` Aus **317-14**"$\mathsf{nan} \uparrow 2 = \mathsf{nan}$",
aus 2"$\ldots \Omega = \mathsf{nan}$" und
aus `1.4.Fall`"$x = \mathsf{nan}$"
folgt: $\Omega \uparrow 2 = x$.

`4:` Aus 2"$\exists \Omega \ldots$",
aus `3.1`"$\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]$" und
aus `3.2`"$\Omega \uparrow 2 = x$"
folgt: $\exists \Omega : (\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$\exists \Omega : (\Omega \in \{\mathsf{nan}\} \cup [0| + \infty]) \wedge (\Omega \uparrow 2 = x).$$

<u>Beweis **317-57**</u> `c)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`2.1:` Aus `Thema1.1`“$\alpha\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$”
folgt via **ElementAxiom**: α Menge.

`2.2:` Aus `Thema1.1`“$\alpha\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$”
folgt via des bereits bewiesenen `b)`:
$$\exists\Omega:(\Omega\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty])\wedge(\Omega\uparrow 2=\alpha).$$

`3:` Aus `2.2`“$\Omega\uparrow 2=\alpha$” und
aus `2.1`
folgt: $\Omega\uparrow 2$ Menge.

`4:` Aus **317-4**“$\uparrow 2$ Funktion”,
aus `2.2`“$\ldots\Omega\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\ldots$” und
aus `3`“$\Omega\uparrow 2$ Menge”
folgt via **18-27**: $\Omega\uparrow 2\in(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]$.

`5:` Aus `2.2`“$\ldots\Omega\uparrow 2=\alpha$” und
aus `4`
folgt: $\alpha\in(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall\alpha:(\alpha\in\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty])\Rightarrow(\alpha\in(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1}\ \big|\ \text{“}\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\subseteq(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]\text{”}}$

`1.2:` Aus **317-11**“$\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\subseteq\mathbb{T}$”
folgt via **8-9**: $(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]\subseteq(\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

`2:` Aus `1.2`“$(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]\subseteq(\uparrow 2)[\mathbb{T}]$” und
aus **317-13**“$(\uparrow 2)[\mathbb{T}]\subseteq\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$”
folgt via **0-6**: $(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]\subseteq\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$.

`3:` Aus `2`“$(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]\subseteq\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]$” und
`A1` gleich “$\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]\subseteq(\uparrow 2][\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]$”
folgt via **GleichheitsAxiom**:
$$(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty]]=\{\mathsf{nan}\}\cup[0|+\infty].$$

<u>Beweis **317-57**</u> `d)`

`1.1:` Via **317-13** gilt: $(\uparrow 2)[\mathbb{T}] \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`1.2:` Aus **317-11**"$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **8-9**: $(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] \subseteq (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

`2:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$(\uparrow 2)[\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

`3:` Aus `2` und
aus `1.2`
folgt: $\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$.

`4:` Aus `1.1`"$(\uparrow 2)[\mathbb{T}] \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$" und
aus `3`"$\{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty] \subseteq (\uparrow 2)[\mathbb{T}]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $(\uparrow 2)[\mathbb{T}] = \{\mathsf{nan}\} \cup [0|+\infty]$.

$\square$

- **C. Bandelow**, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
- **H. Brauner**, *Differentialgeometrie*, Vieweg, 1981.
- **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6).
- **K.P. Grotemeyer**, *Topologie*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1969.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **H.B. Mann & D.R. Whitney**, *On a test wheter one of two random variables is stochastically larger than the other*, Annals of mathematical statistics 18:50-60(1947).
- **R. Mlitz**, *Analysis 1.2.3*, Vorlesungsskriptum, TU Wien, 1984.
- **Wikipedia**. *http://de.wikipedia.org/wiki/Neutrophiler_Granulozyt.* Datum: 14-01-09. Letzte Änderung: 13-12-12 06:46.